Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione

QUADERNI SNV
N. 1/2012 –MAT

Le prove INVALSI di matematica nella classe seconda e quinta della scuola primaria

Giorgio Bolondi, Rita Canalini, Paola Migliano, Ketty Savioli

Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo la responsabilità dell'Istituto. Nel citare i temi, non è, pertanto, corretto attribuire le argomentazioni ivi espresse all'INVALSI o ai suoi Vertici

Introduzione 2
Commenti e analisi dei risultati relativi agli ambiti e considerazioni sui macroprocessi ... 3
Conclusioni 40

Introduzione

Questo *Quaderno* intende integrare, con un'analisi di carattere qualitativo, la consueta restituzione alle scuole degli esiti della prova INVALSI di Matematica, somministrata in seconda e quinta primaria nel mese di maggio del 2012.
Tale analisi è una delle molteplici possibili e intende fornire, oltre a un resoconto di carattere generale, alcuni spunti di riflessione che possano contribuire a orientare gli insegnanti verso scelte metodologico-didattiche sempre più efficaci. In tal senso, pur riscontrando elementi di positività, è particolarmente produttivo evidenziare le criticità poiché la loro messa a fuoco è un elemento fondamentale della *valutazione formativa*, valutazione finalizzata al miglioramento dei processi di insegnamento-apprendimento.
Questa *introduzione* richiama in modo sintetico i contenuti e i processi ai quali si fa riferimento sia per costruire le domande, sia per classificare i risultati e fornisce, inoltre, informazioni generali sull'andamento della prova. Gli altri paragrafi propongono analisi di carattere qualitativo con riferimento a molte domande dei test di seconda e quinta, relative a contenuti e/o processi equiparabili.
Scegliere una "prospettiva verticale" consente di valutare l'andamento nel lungo termine sia degli elementi di positività, sia di quelli di criticità che vengono di volta in volta evidenziati: valutazione, programmazione curricolare e didattica sono strettamente connesse.
Per i docenti, soffermarsi a "leggere" gli esiti in un'ottica di verticalità, può essere un momento produttivo e riflessivo. È fondamentale che l'insegnante sia consapevole di come l'apprendimento della matematica vada valutato sul lungo periodo, nella logica di un cammino didattico di tipo "elicoidale"[1], ossia che riprende gli argomenti nel tempo approfondendo di volta in volta certi aspetti alla luce della nuova conoscenza
A questo cammino didattico, che cresce e si evolve, se ne affianca uno valutativo, anch'esso in evoluzione. La valutazione diventa così sinergica con la didattica e permette di evidenziare quei punti di forza e di debolezza che è opportuno riconoscere per supportare l'apprendimento e migliorare l'insegnamento.
La prova per la seconda primaria (SNV02) può essere considerata come un *monitoraggio in ingresso* al percorso della scuola di base. Nel Rapporto Tecnico Invalsi[2] (p.48) si sottolinea che *"accade frequentemente che le capacità di comprensione della lettura degli alunni venga sottostimata, con la conseguenza che non vengono proposti loro testi ritenuti complessi, ma che in realtà non lo sono realmente per i bambini stessi. Anche in questo senso, le prove standardizzate proposte a tutti gli alunni della classe seconda primaria sono molto utili poiché consentono di fornire una misura solida e comparativamente informativa sulla reale comprensione della lettura dei bambini di 7 anni che frequentano le scuole italiane, statali e paritarie."*
In modo analogo, i risultati di questi anni hanno dimostrato che spesso viene sottostimata, nei bambini di 7 anni, anche la capacità di comprendere *contesti matematici.*
Fatte le dovute distinzioni per gli alunni in situazioni particolari, è dunque importante impostare una didattica in cui l'autonomia sia un valore da potenziare fin dai primi anni della scuola

[1]Per approfondimenti http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2001/matematica2001.html
[2] Rapporto Tecnico INVALSI 2012 reperibile su http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/Rapporti/Rapporto_tecnico_SNV2012.pdf

primaria anche attraverso la lettura autonoma delle consegne, la soluzione di problemi non-standard, l'argomentazione matematica scritta e la partecipazione alla discussione matematica.

Commenti e analisi dei risultati relativi agli ambiti e considerazioni sui macroprocessi

Per tutto il primo ciclo di istruzione, gli ambiti di valutazione sono definiti in base al *Quadro di Riferimento per la matematica*[3], sviluppato a partire dalle *Indicazioni nazionali per i piani di studio personalizzati del 2004* e dalle *Indicazioni per il curricolo 2007*, coerente con le recenti proposte di modifica del 2012, e tenendo conto dei quadri di riferimento delle indagini comparative internazionali sulla matematica[4] (in particolare IEA-TIMSS e OCSE-PISA).
Il *Quadro di Riferimento*, in accordo con la ricerca internazionale TIMSS, è stato organizzato sulla base di due diverse dimensioni:

- *dimensione dei contenuti* che riguarda i diversi ambiti matematici a cui le domande fanno riferimento;

- *dimensione dei processi* che si riferisce alle diverse dinamiche chiamate in causa per rispondere ai quesiti.

I contenuti, per quanto riguarda la classe seconda, sono suddivisi in tre ambiti: *Numeri, Spazio e figure, Dati e previsioni*. Per le classi successive è previsto un quarto ambito: *Relazioni e funzioni*.
In seconda, considerando la giovane età degli allievi, le prove a scelta multipla si limitano a tre opzioni anziché quattro e non sono state proposte (nel 2011/12) domande a risposta aperta articolata.
La seguente tabella propone un prospetto riassuntivo delle caratteristiche delle prove di Matematica del 2012, relativamente alle classi seconda (Prova SNV02) e quinta (Prova SNV05)[5].

Classe	**Ambiti di contenuto**	**N. domande per ambito**	**N.item per ambito**	**N.item per tipologia**
II Primaria (Prova SNV02)	- Numeri	13	18	Scelta multipla: 15
	- Spazio e figure	5	7	Scelta multipla complessa: 0
	- Dati e previsioni	2	7	Aperta risposta univoca: 17
				Aperta risposta articolata: 0
45 minuti		**totale 20**	**totale 32**	

I seguenti grafici si riferiscono agli esiti complessivi della prova 2012 proposta in seconda e quinta con riferimento agli *ambiti di contenuto*.

[3] Per approfondimenti : http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/QDR/QdR_Mat_I_ciclo.pdf
[4] Per maggiori approfondimenti consultare la sezione Ricerche Internazionali sul sito INVALSI
[5] Per una analisi completa della distribuzione dei quesiti negli ambiti e nei processi, nonché per le percentuali delle risposte a tutte le domande, si vedano le guide alla lettura delle prove di matematica assegnate agli studenti del secondo e del quinto anno della scuola primaria (http://www.invalsi.it/snv2012/index.php?action=strumenti)

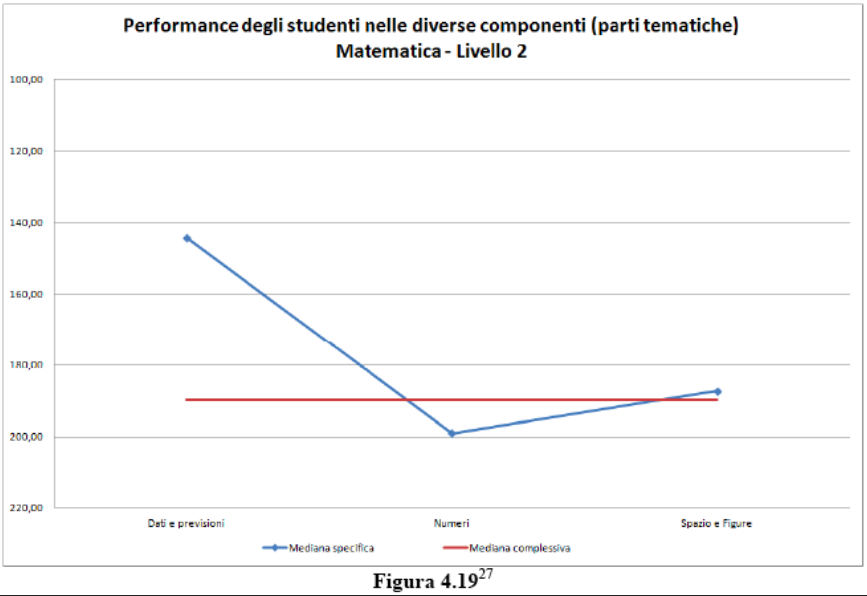
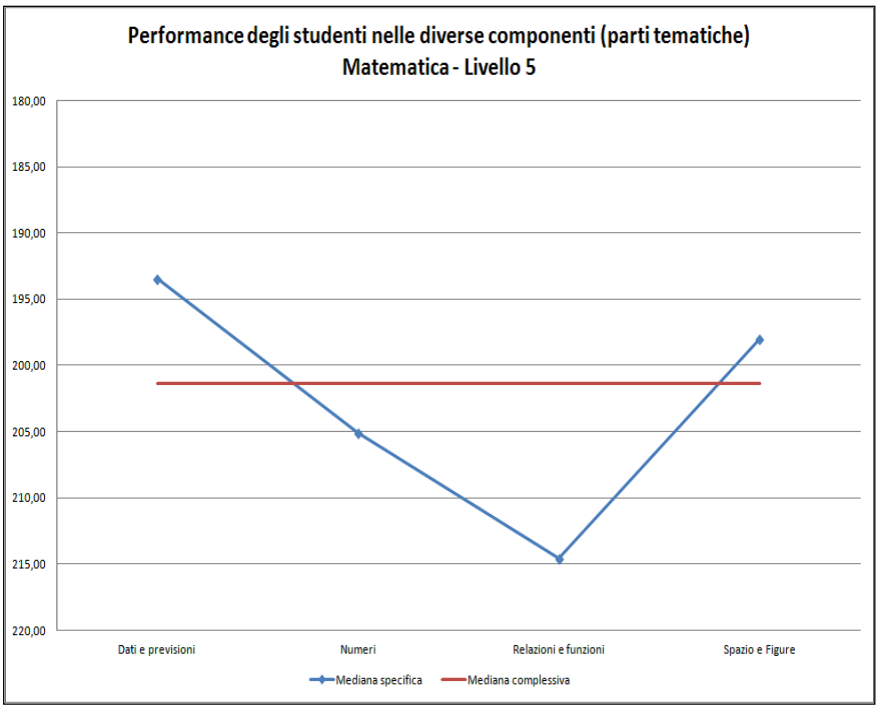


Figura 4.19[27]



Le domande relative all'ambito *Dati e previsioni* presentano, in entrambi i livelli, una migliore *performance*[6] rispetto a quelle degli altri ambiti. L'ambito *Numeri* presenta *performance* negativa sia in seconda che in quinta; *Spazio e figure* si colloca in una posizione intermedia. Per la quinta, *Relazioni e funzioni* risulta essere l'ambito con *performance* peggiore.

[6]Per un approfondimento consultare il capitolo 3 del Rapporto Tecnico 2012
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/Rapporti/Rapporto_tecnico_SNV2012.pdf

Occorre riflettere sul fatto che i risultati più deludenti riguardano l'ambito *Numeri,* ambito oggetto di maggiore attenzione nella comune prassi didattica, se non altro in termini di tempo dedicato all'insegnamento dei contenuti afferenti a questo ambito. Risulta pertanto contradditorio ottenere esiti meno soddisfacenti rispetto ad altri ambiti sicuramente più "trascurati".
Ricomporre questa contraddizione significa considerare il complesso intreccio tra nodi concettuali, processi cognitivi coinvolti, competenze disciplinari e scelte metodologico-didattiche degli insegnanti, e ovviamente anche considerare la difficoltà specifica dei quesiti utilizzati.
L'analisi degli esiti delle prove può contribuire a questa complessa riflessione in quanto permette di evidenziare elementi di criticità sia in relazione a nodi concettuali, sia a processi cognitivi che le attuali diffuse pratiche didattiche non sembrano tenere adeguatamente in considerazione.
I dati, dunque, per essere correttamente interpretati, necessitano di essere correlati ai livelli di difficoltà degli item afferenti a ciascun ambito; livelli di difficoltà quantificati, dopo essere stati sottoposti ad analisi statistiche[7], in una scala che va da -4 (difficoltà minima) a +4 (difficoltà massima).

In particolare la prova di seconda presenta un livello di difficoltà medio-basso (23 item presentano un indice di difficoltà negativo e 9 positivo). Proponendo domande non troppo complesse, si dovrebbe sollecitare un'adesione positiva al compito da parte di allievi ancora molto giovani (fattore questo da non sottovalutare); ma è altresì importante che ci siano domande più complesse che consentano di individuare i livelli molto alti di abilità e competenza. In altri termini, poiché l'obiettivo delle prove INVALSI è monitorare tutti i diversi livelli di abilità/competenza presenti nella popolazione di riferimento, è necessario introdurre quesiti "difficili": i livelli di apprendimento generalmente raggiunti potrebbero essere comunque soddisfacenti anche se pochi alunni riusciranno a rispondere a tutti i quesiti.

Si passa ora a considerare l'andamento generale della prova in relazione ai processi, declinati in otto differenti tipologie e aggregati in quattro *macroprocessi*:

[7]Cfr. il Rapporto Tecnico 2012 sopra citato

	PROCESSI	MACROPROCESSI
1	Conoscere e padroneggiare i **contenuti specifici** della matematica.	**CONCETTI E PROCEDURE**
2	Conoscere e padroneggiare **algoritmi e procedure**	**CONCETTI E PROCEDURE**
3	Conoscere e padroneggiare diverse **forme di rappresentazione** e saper passare da una all'altra.	**RAPPRESENTAZIONI**
4	Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica	**MODELLIZZAZIONE**
5	Sapere riconoscere in contesti diversi il **carattere misurabile** di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura.	**MODELLIZZAZIONE**
6	Acquisire progressivamente **forme tipiche del pensiero matematico**	**ARGOMENTAZIONE**
7	Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale	**MODELLIZZAZIONE**
8	Saper riconoscere le forme nello spazio	**RAPPRESENTAZIONI**

Il seguente grafico mostra l'andamento generale della prova in relazione ai processi raggruppati nei 4 *macroprocessi* per entrambi i livelli.

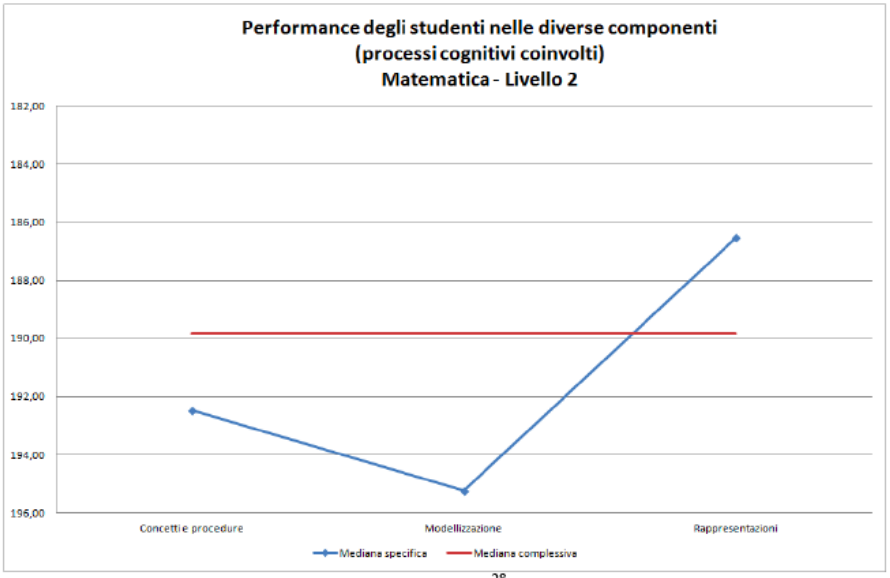
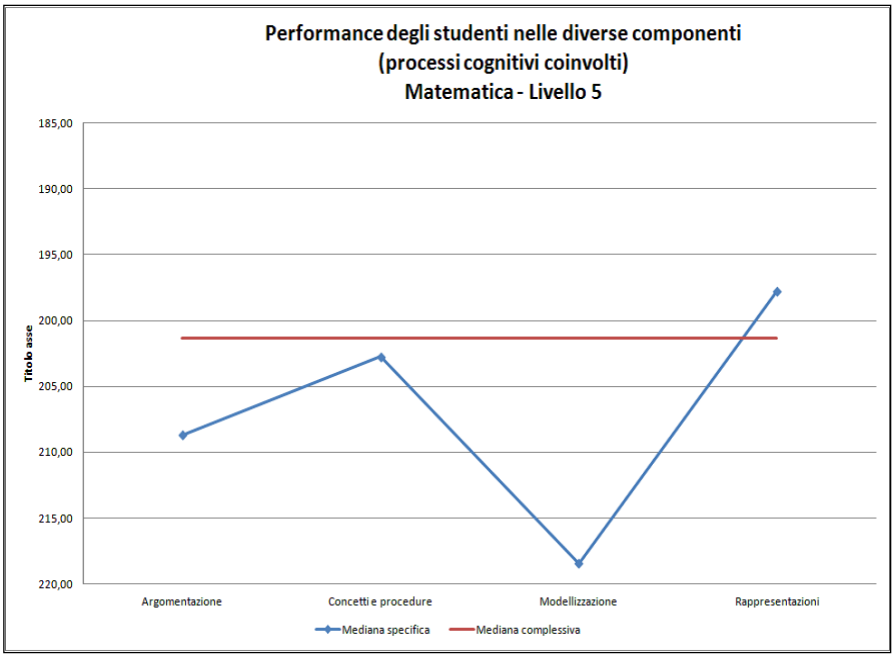


Figura 4.20[28]



L'*Argomentazione* non è contemplata per la classe seconda, anche se la ricerca in educazione matematica ha dimostrato come alunni di questa età siano in grado di spiegare e giustificare strategie di soluzione di problemi.
A questo livello di scolarità, alcuni alunni hanno ancora necessità di dedicare buona parte della loro attenzione agli aspetti strumentali della scrittura e ciò potrebbe condizionare le loro capacità di argomentare attraverso la stesura di un testo. Tuttavia è possibile proporre, anche nella Prova SNV02, item a scelta multipla contenenti tre diversi brevi testi argomentativi, per monitorare la capacità di distinguere, tra le varie opzioni, quella corretta (come già sperimentato nelle prove di classe seconda del 2010 e 2011).
Per entrambi i livelli, l'unico macroprocesso che non risulta essere debole è *Rappresentazioni,* mentre *Modellizzazione* presenta la *performance* meno soddisfacente.
La *Modellizzazione* riguarda le domande in cui si richiede di risolvere un problema considerando le informazioni disponibili, di valutare diverse soluzioni per identificare quella corretta, di stabilire la relazione tra il testo di un problema e la soluzione formalizzata (attraverso simboli matematici ma anche schemi di carattere grafico), o anche di interpretare un modello matematico.
La *Modellizzazione* è sicuramente un processo complesso; il fatto che emerga come punto debole richiama l'attenzione sulla necessità, ampiamente evidenziata dalla ricerca in didattica, di dedicare maggiore attenzione alla *comunicazione in matematica,* a quelle attività di carattere interattivo che, avvalendosi di diversi registri linguistici (orali e scritti), grafici, simbolici e perfino gestuali, permettono di mantenere una relazione costante tra situazioni problematiche e loro rappresentazione. È importante inoltre, ai fini della costruzione di solide competenze, che i problemi siano intesi come *questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana* come viene affermato nelle *Indicazioni 2012* e che l'attività di soluzione di problemi sia caratterizzata da ampi spazi dedicati alla discussione.

Si tratta di coinvolgere gli allievi nelle fasi di:

- selezione e rappresentazione degli elementi *oggetto di matematizzazione*, anche attraverso registri di rappresentazione diversi;
- confronto di diverse ipotesi di soluzione;
- verifica e giustificazione di tali ipotesi ricorrendo anche a una scelta coerente di connettivi e quantificatori;
- riflessione su possibili errori.

Come espresso e approfondito nel *Rapporto Tecnico*, diverse analisi statistiche servono a misurare la solidità di una prova. Attraverso una di queste viene calcolato un indice di attendibilità, chiamato α di *Cronbach*[8]. Questo indice, integrato con altri, permette di esprimere una valutazione sintetica e generale sulla coerenza complessiva della prova e quindi sull'attendibilità delle informazioni, che da essa si possono desumere. L'α di *Cronbach* è un indice espresso da un numero compreso fra 0 e 1 e tanto più si avvicina a 1, tanto maggiore è la coerenza complessiva della prova oggetto d'interesse. Per entrambe le prove, l'indice di *Cronbach* è superiore a 0,80 e dunque l'attendibilità risulta essere *molto buona* (precisamente 0,85 per il livello 2 e 0,91 per il livello 5).
Avviamo ora l'analisi di alcuni item, partendo dall'ambito *Numeri*.

In generale, per la prova di seconda, un aspetto positivo che emerge è una buona competenza per quanto riguarda le abilità di calcolo, perlomeno a livello procedurale**,** come tendono ad evidenziare gli esiti delle domande D20 e D17, che si riferiscono entrambe al processo 2 (*Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure*).

D20. Osserva le operazioni nel riquadro.

7+7

4+4

5x3 2x7

4x4

a. Fa' un triangolo (△) intorno all'operazione che dà come risultato 15.

b. Fa' un cerchio (○) intorno all'operazione che dà il risultato maggiore.

c. Fa' un quadrato (□) intorno all'operazione che dà il risultato minore.

d. Collega con una freccia (↔) le due operazioni che danno lo stesso risultato.

Risposta corretta:
D20a: 5 x 3
D20b: 4 x 4
D20c: 4 + 4
D20d: 7 + 7 e 2 x 7

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D20a	10,2	69,8	2,4
D20b	23,7	53,6	3
D20c	18,5	58,5	2,4
D20d	23,6	54,1	20,9

[8]Per maggiori dettagli e approfondimenti relativi all'elaborazione statistica consultare il Rapporto Tecnico 2012 (capitolo 3) sopra citato.

D17. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

A. ☐ 31 = 42 - 9

B. ☐ 31 = 40 - 9

C. ☐ 31 = 21 + 11

Risposta corretta: B
L'alunno deve individuare l'uguaglianza corretta.

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
10,7	56,4	22,8	6,4

Le operazioni proposte possono apparire semplici, data la bassa taglia numerica, tuttavia in entrambi i casi non viene richiesto semplicemente un calcolo.
Infatti in D20 occorre tener conto di consegne aggiuntive, ossia circondare l'operazione con determinate forme o collegarle in base al risultato comprendendo il significato di "*maggiore di*", "*minore di*" e "*stesso risultato*" (quest'ultima consegna, più complessa, registra peraltro un'alta percentuale di omissioni); in D17 è necessario considerare l'inusuale scrittura di una uguaglianza che propone a sinistra, e non a destra, il risultato dell'operazione.

Si rileva anche una discreta conoscenza del numero per quanto riguarda l'aspetto ordinale**.** Si è già evidenziato, in relazione al quesito D20, come un'apprezzabile percentuale di allievi sia in grado di operare confronti fra numeri, anche nel contesto di più richieste da considerare contemporaneamente. Il seguente quesito D4 è classificato come *processo prevalente* nel processo 3 (*Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra*) anche se, ovviamente, gioca un suo ruolo anche la conoscenza della scrittura posizionale e del sistema decimale. Positivi sono i risultati relativi all'item D4a pur permanendo, in molti casi, la difficoltà di considerare la rappresentazione nel suo complesso, difficoltà che induce a scegliere 2 o 5 con prevalenza del 2, il più "suggestivo" dei distrattori.

D4. Osserva questa retta dei numeri:

a. Quale tra i seguenti numeri scriveresti nel posto indicato dal triangolino?

A. ☐ 2

B. ☐ 10

C. ☐ 20

b. Sulla retta dei numeri disegnata sopra metti al posto giusto il numero 60.

Risposta corretta:
D4a: C
L'alunno deve individuare, su una retta numerica, il numero che si trova nella posizione indicata dal triangolino riconoscendo quale intervallo intercorre tra due tacche (10 – numerazione per 10).

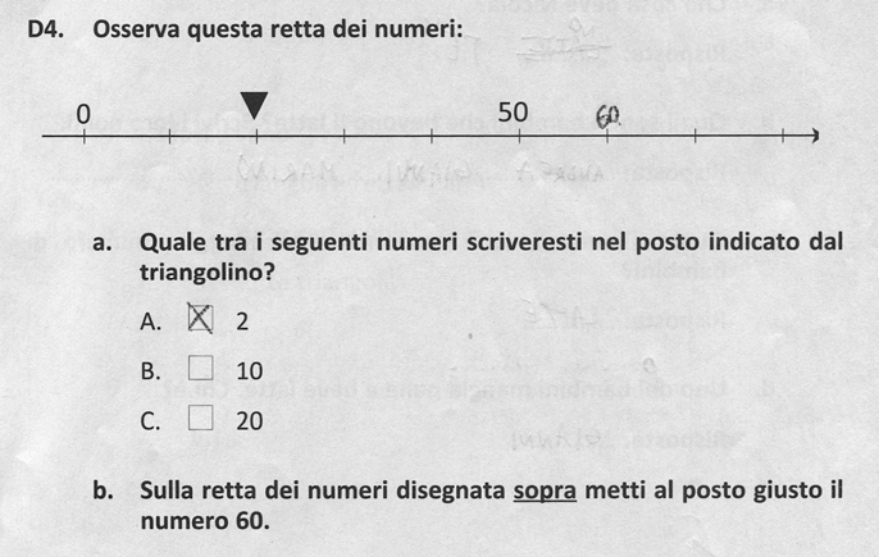
D4b
posizionamento corretto sulla tacca relativa a **60**

RISULTATI DEL CAMPIONE

	A	B	C	Non risponde
D4a	19,1	15,1	63,0	2,5

	errata	corretta	Non risponde
D4b	15,8	58,4	25,1

L'item D4b registra invece un'alta percentuale di omissioni. Una possibile spiegazione è che molti di coloro che hanno scelto la risposta A (cioè 2) nella prima parte, assegnando dunque valore 1 alla distanza tra le tacche, si trovano a non poter collocare il numero 60. Se tale ipotesi fosse corretta, allora non rispondere costituirebbe un "errore intelligente": il bambino ha compreso che, sulla retta numerica, la distanza tra una tacca e l'altra deve rappresentare sempre lo stesso numero. C'è in effetti anche chi non considera questa fondamentale caratteristica e fornisce soluzioni tra loro contraddittorie come nel caso del seguente protocollo.


D4. Osserva questa retta dei numeri:

0 50 60

a. Quale tra i seguenti numeri scriveresti nel posto indicato dal triangolino?

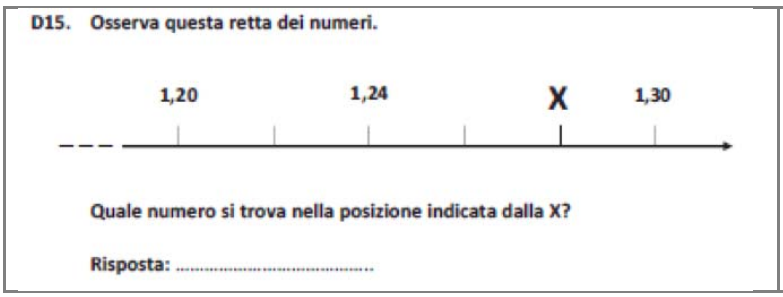
A. ☒ 2

B. ☐ 10

C. ☐ 20

b. Sulla retta dei numeri disegnata sopra metti al posto giusto il numero 60.

Nuovamente ciò che emerge è la difficoltà a interpretare la rappresentazione nel suo complesso. Tuttavia, questa capacità di decodificare in modo corretto una determinata sequenza proposta sulla retta dei numeri, tende a progredire nel corso del tempo, come testimoniano gli esiti della domanda D15 proposta in quinta e, sempre con riferimento alle stesse prove, evolve anche la capacità di confrontare numeri, come analizzato per la D1.


D15. Osserva questa retta dei numeri.

1,20 1,24 X 1,30

Quale numero si trova nella posizione indicata dalla X?

Risposta: .....

Risposta corretta: 1,28

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
19,4	78,1	2,4

D1. **La macchia copre un numero.**

1 < < 2

Quale tra i seguenti numeri può essere nascosto sotto la macchia?

A. 0,12

B. 0,5

C. 1,7

D. 2,1

Risposta corretta: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
3,7	9,8	77,2	7,8	1,5

Un importante elemento di criticità che emerge dall'analisi delle prove è invece un'insoddisfacente comprensione della notazione posizionale con conseguenti ricadute negative sul calcolo mentale.

Consideriamo la domanda D10 proposta in seconda primaria, classificata come *processo prevalente* nel processo 1 (*Conoscere e padroneggiare contenuti specifici della matematica*: nella fattispecie, la notazione posizionale). In effetti, le difficoltà di molti bambini possono essere invece riconducibili alla difficoltà di passaggio dal registro verbale a quello simbolico. In questi casi, il lavoro diagnostico dell'insegnante può essere decisivo per superare le difficoltà.

D10. **Quale tra i seguenti numeri corrisponde a 3 decine e 17 unità?**

A. 317

B. 173

C. 47

Risposta corretta: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
58,4	4,2	34,8	2,1

L'alunno deve identificare un numero in base al valore delle cifre espresso a parole, operando la trasformazione delle unità in *decine e unità*. Nella risposta A le cifre dei numeri coinvolti sono riportate nello stesso ordine in cui vengono presentate nel testo, senza operare trasformazioni. Nella risposta B le cifre dei numeri sono riscritte scambiando l'ordine, senza operare trasformazioni.

Solo poco più di un terzo degli allievi assegna il corretto significato all'espressione verbale , la netta maggioranza sceglie la soluzione che propone le cifre secondo un ordine che rispecchia quello in cui compaiono nel testo della domanda. Si può pensare che la difficoltà insorga a causa di una ancora limitata consuetudine, in seconda primaria, nell'operare con numeri di tre cifre (sebbene sarebbe auspicabile che anche al livello 2 gli allievi avessero dimestichezza con tali numeri). Tuttavia una domanda simile, proposta sempre in seconda nel 2009, ha ottenuto risultati sorprendentemente sovrapponibili. Come si può osservare, solo in una opzione di risposta su tre si propone un numero di 3 cifre (anche in questo caso rispettando l'ordine in cui queste compaiono nel testo). La percentuale di risposte corrette è però praticamente la stessa, e la percentuale di bambini che "giustappone" le decine e le unità è sempre oltre la metà nel 2012, ad aggravare la situazione, può aver giocato il fatto che questo tipo di distrattore era in prima posizione.

10. Quale numero corrisponde a 4 decine e 15 unità? ☐ A. 45 ☐ B. 55 ☐ C. 415	**Somministrazione 2009 livello 2** **Risposta corretta: B** RISULTATI DEL CAMPIONE 2009 A: 12,5% B: 32,5% C: 50,4%

Ci si può domandare quanto possano aver indotto all'errore batterie di esercizi del tipo *1h+3da+5u=...* invece di proposte che sollecitino l'allievo a considerare con attenzione il valore di ogni "unità" (nel senso di *potenza del dieci*), ad esempio, *14u+3da+10da=...* (eventualmente con l'ausilio di strumenti che coinvolgano l'idea di valore posizionale, come ad esempio l'abaco)[9]. Non solo, una mancata comprensione della nozione di decina, primo passo verso una sempre più matura comprensione del nostro sistema di notazione, continua a interferire anche negli anni successivi con la corretta individuazione del valore posizionale, come testimonia la D10 sempre proposta nel 2009 per la classe quinta.

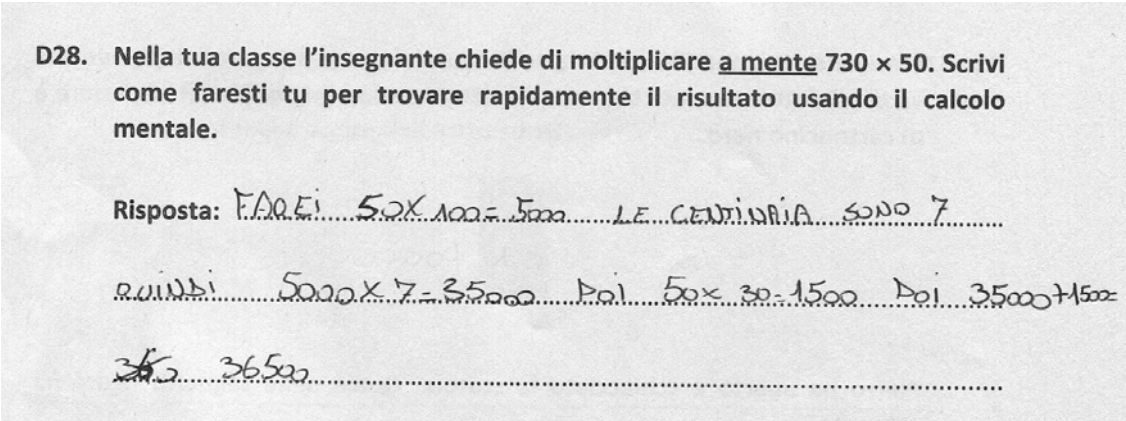
10. A quale numero corrispondono "12 decine, 7 decimi e 2 millesimi"? ☐ A. 12,702. ☐ B. 120,702. ☐ C. 12,72. ☐ D. 120,72.	**Somministrazione 2009 livello 5** **Risposta corretta: B** RISULTATI DEL CAMPIONE 2009 A: 44,5% B: 33% C: 18,6% D: 3,3%

In quinta gli allievi considerano la corretta posizione delle cifre per quanto riguarda decimi e millesimi (presente anche nel distrattore A), ma si ripropongono le stesse difficoltà già emerse in seconda per quanto riguarda il valore posizionale della decina.
Si tratta di una carenza che incide notevolmente sull'acquisizione di strategie di calcolo mentale in quanto impedisce di procedere avvalendosi della possibilità di decomporre/comporre il numero.

Ritorniamo ora sulla domanda D17 (per la seconda), già citata precedentemente. L'item richiede di individuare l'uguaglianza corretta. Ben un allievo su cinque ritiene corretta, sbagliando, l'uguaglianza 31= 21+11. In quinta troviamo una analoga difficoltà, nel calcolo mentale: infatti, alla domanda D28, solo il 36,8% riesce a proporre soluzioni adeguate analoghe a quella mostrata nel successivo protocollo. Questa domanda è classificata nel processo 2 (*Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure*), dove la procedure da utilizzare per eseguire la moltiplicazione non è la solita, con carta e penna, ma una strategia più adatta al calcolo mentale (basata ad esempio sull'utilizzo della proprietà distributiva, come nel caso del protocollo qui presentato).

[9]Per un ulteriore approfondimento si può consultare il quaderno SNV per il livelli 5 e 6 (http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N2_MAT.pdf) e l'analisi degli item relativi alla rappresentazione polinomiale del numero.

D28. **Nella tua classe l'insegnante chiede di moltiplicare a mente 730 × 50. Scrivi come faresti tu per trovare rapidamente il risultato usando il calcolo mentale.** **Risposta:**	**Risposta corretta**: Lo studente deve spiegare a parole come farebbe il calcolo a mente. **RISULTATI DEL CAMPIONE** errata: 47,5 | corretta: 36,8 | Non risponde: 11,0



D28. **Nella tua classe l'insegnante chiede di moltiplicare a mente 730 × 50. Scrivi come faresti tu per trovare rapidamente il risultato usando il calcolo mentale.**

Risposta: FAREI 50X 100= 5000 LE CENTINAIA SONO 7 QUINDI 5000X 7=35000 POI 50X 30=1500 POI 35000+1500= 36500

Come si è detto, il protocollo è interessante anche sotto un altro punto di vista: l'allievo ricorre alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. Ciò che si vuole sottolineare è che coltivare abilità di calcolo mentale implica una progressiva e sempre più sicura comprensione sia del sistema di notazione numerica sia delle proprietà delle operazioni.

In positivo si segnalano percentuali di risposte corrette abbastanza elevate per quanto riguarda la soluzione di alcuni problemi aritmetici non banali come nel caso della domanda D3 per la classe seconda. Questo item, come i seguenti, è classificato come processo 4 *(Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi- numerico, geometrico, algebrico*). La percentuale di risposte corrette, per entrambi gli item, si attesta peraltro sotto il 50%.

D3. Sandra ha nel borsellino queste monete:

a. **Quanto ha Sandra nel borsellino?**

Risposta: ..... centesimi

b. **Sandra con le monete che ha nel borsellino vuole comprare dei cioccolatini. Ogni cioccolatino costa 30 centesimi. Quanti cioccolatini può comprare al massimo?**

Risposta: ..... cioccolatini

Risposta corretta:
D3a: 93 o novantatre

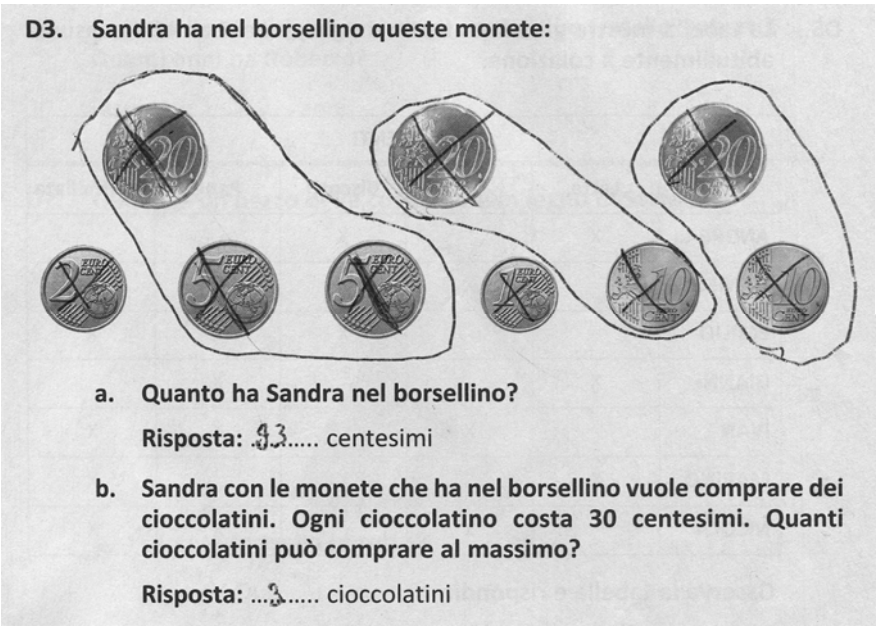
D3b: 3 o tre

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D3a	48,0	47,5	4,3
D3b	46,6	43,9	9,3

L'alunno deve trovare una strategia per capire quanti cioccolatini può comprare *al massimo* con i centesimi a disposizione, ad esempio attraverso raggruppamenti (con tracce grafiche sul foglio) o addizioni ripetute e confronti (30+30+30=90 e 90<93) o altre strategie. L'alunno deve anche interpretare correttamente la locuzione "*al massimo*".

Ecco un protocollo che mostra un procedimento risolutivo originale



Il protocollo è interessante poiché l'allievo mostra di aver adottato la seguente strategia di soluzione: "raggruppare" alcune monete per rappresentare il valore 30 centesimi, costo di un cioccolatino, e, in seguito, considerare "quante volte" si possono spendere 30 centesimi dunque quanti cioccolatini si possono *"comprare al massimo"*. È del tutto ragionevole ritenere che, in seconda primaria, sia stata questa strategia additiva a consentire una corretta soluzione. Testi simili, a livelli di scolarità successivi, vengono generalmente proposti dall'insegnante come problemi da risolvere ricorrendo a una divisione (cosiddetta di contenenza). In proposito,

analizziamo ora l'item D30 per il livello 5, in cui il problema è sostanzialmente lo stesso ma i risultati sono decisamente peggiori.

D30. **Marta è appassionata di fumetti. La nonna le regala 20 euro e Marta decide di spenderli per acquistare dei giornalini che costano € 2,20 l'uno. Quanti giornalini riesce a comprare al massimo?**

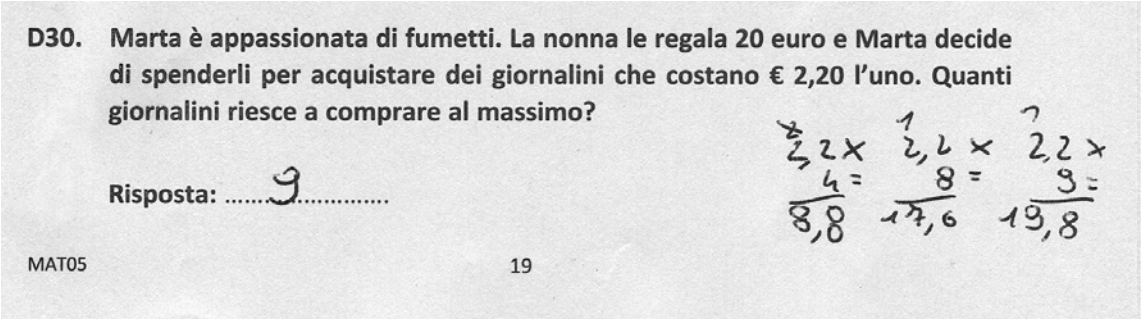
Risposta: .....

Risposta corretta: 9

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
49,9	35,2	9,2

Solo il 35,2% degli allievi risponde correttamente sebbene, anche in questo caso, sarebbe stato sufficiente e, in definitiva, conveniente rispetto alle difficoltà "tecniche" che l'esecuzione della divisione 20:2,20=... comporta, adottare strategie analoghe a quelle descritte per i "buoni solutori" in seconda primaria. È sufficiente, ad esempio, eseguire una semplice moltiplicazione come addizione ripetuta, ossia 2,20 x 10 = 22 e valutare che, se mancano 20 centesimi all'acquisto del decimo giornalino, allora se ne possono acquistare 9. Si può anche procedere per tentativi che contemplino una stima dell'ordine di grandezza, come testimonia il seguente protocollo[10].



Come spiegare dunque un risultato significativamente più deludente in quinta rispetto alla seconda? La presenza di numeri decimali è certamente un elemento di complessità da non sottovalutare, tuttavia anche in seconda non è banale considerare il diverso valore delle monete disegnate. L'esempio in realtà sembra essere paradigmatico. Si può avanzare l'ipotesi che, in prassi didattiche generalizzate, non vengano valorizzate altre strategie di soluzione, magari meno "eleganti" dal punto di vista del sapere adulto, ma ugualmente efficaci e che, soprattutto, contemplino il ricorso ad operazioni di cui l'allievo domina il "senso". Nel caso considerato, ad esempio, ricorrere alla moltiplicazione come addizione ripetuta (ragionamento di tipo additivo) può consentire di risolvere il problema anche ad allievi che ancora non padroneggino con sufficiente sicurezza il significato della moltiplicazione e della sua operazione inversa. È plausibile dunque che l'introduzione troppo precoce o di carattere trasmissivo di soluzioni formalizzate, soprattutto quelle più complesse, non solo sia improduttiva dal punto di vista dell'apprendimento, ma inibisca perfino la ricerca di possibili soluzioni che facciano leva su competenze acquisite. Comunque, l'abitudine al calcolo mentale, alla stima e al controllo semantico del risultato sono tutti fattori che possono contribuire anche al consolidamento dell'abilità nell'esecuzione della procedura standard di divisione.

[10] L'allievo moltiplica per 4, probabilmente valuta che se 8,8 è minore di 10 e che 10+10=20 allora si possono acquistare almeno il doppio dei giornalini e moltiplica per 8, stima la differenza tra 17,6 e 22 e moltiplica per 9 valutando infine 19,8 come "limite" di spesa possibile.

Altri esempi di problemi non banali che una discreta percentuale di allievi ha risolto correttamente sono i seguenti, sempre riconducibili al processo 4.

D11. Il papà di Luca compie 43 anni.
Luca va al supermercato a comprare le candeline per la torta.
Al supermercato vendono solo sacchetti da 10 candeline.
Quanti sacchetti deve comprare Luca?

A. ☐ 5

B. ☐ 4

C. ☐ 3

Risposta corretta: **A**

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
49,8	38,1	8,9	2,3

Il testo della domanda D11 per la seconda primaria contiene un'informazione implicita che il bambino deve cogliere: i sacchetti non sono frazionabili. Per rispondere al quesito non è necessario aver affrontato la divisione (normalmente avviata alla fine della seconda primaria) poiché il risultato si può ottenere mediante il confronto fra numeri, anche se inusuale: 4 sacchetti non sono sufficienti perché 40<43 dunque, sempre tenendo conto che i sacchetti non sono frazionabili, ne occorrono 5 anziché 4. La domanda ripropone un caso esemplare della letteratura in didattica della matematica, noto come il *problema dei camion.*[11]
Se da un lato è positivo che circa la metà degli allievi abbia individuato la soluzione corretta, dall'altro è necessario notare che il distrattore B ha ottenuto una percentuale del 38,1%.
Si avanza l'ipotesi che, nella didattica, la predominanza di problemi la cui soluzione è rappresentata dal numero che coincide esattamente con il risultato di una operazione possa aver contribuito all'errore: i bambini hanno scelto il dato che permette di "avvicinarsi" di più a 43 (4 sacchetti perché 4x10=40 trascurando il fatto che manchino ancora 3 candeline reperibili dal quinto sacchetto).
Quindi proporre alla classe problemi vari, affrancandosi da quelli standard presenti in molti testi scolastici, offre occasioni di apprendimento che affinano le abilità e le competenze degli allievi nell'attività di risoluzione, soprattutto se ci si avvale della discussione per confrontarsi su errori o su diverse possibili strategie di soluzione.

Sempre relativo al processo 4 è il seguente quesito, tratto dalla prova di seconda primaria.

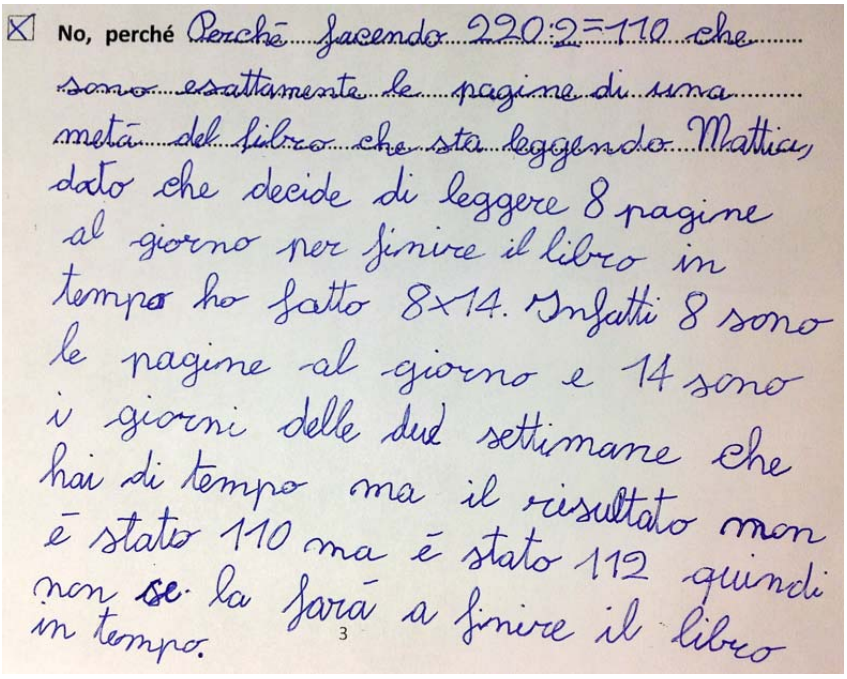
[11]Schoenfeld A.H.: 1987, 'What's All the Fuss about Metacognition?' in Alan Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*, Erlbaum. Nel problema citato, viene chiesto agli allievi di determinare quanti camion con 36 posti sono necessari per trasportare 1128 soldati.

D16. Osserva i seguenti numeri: 6 8 10 14 **Due di questi numeri completano correttamente il problema che segue. Scrivili al posto dei puntini.** Mario ha ..... figurine. Regala a Bruno ..... figurine. Ora a Mario restano 6 figurine.	**Risposta corretta:** **Mario ha ..14.. figurine. Regala a Bruno ...8.. figurine.** **RISULTATI DEL CAMPIONE** errata: 49,1 – corretta: 42,0 – Non risponde: 5,5

Il completamento del *cloze* nell'item D16 comporta l'individuazione della relazione di complementarietà tra 8 e 6 rispetto a 14, relazione che garantisce la coerenza del testo. La complessità del compito risiede nel dover utilizzare contemporaneamente abilità di lettura e conoscenze aritmetiche, attivando anche una sorta di lettura *a ritroso* per verificare la correttezza del completamento richiesto.

Ora riportiamo alcune riflessioni relative all'ambito *Numeri*, a *Relazioni e funzioni* (che, lo ripetiamo, non è presente esplicitamente nella seconda primaria). Consideriamo la domanda D4 per la quinta, relativa all'ambito *Relazioni e funzioni*, e il successivo protocollo che mostra la soluzione di un allievo.

D4. Mattia deve leggere entro la fine dell'anno scolastico un libro di 220 pagine. Quando mancano 2 settimane al termine dell'anno scolastico, si rende conto di essere arrivato esattamente a metà libro. Decide così di leggere 8 pagine al giorno per poter terminare il libro in tempo. **Riuscirà Mattia a terminare in tempo il libro? Scegli una delle due risposte e completa la frase.** ☐ **Sì, perché** .... ☐ **No, perché**	**Risposta corretta: Sì, perché...** Lo studente deve spiegare in modo corretto che il numero di pagine che Mattia riesce a leggere sono più della metà del libro, oppure che per completare la lettura servono meno di 14 giorni oppure che è sufficiente leggere meno di 8 pagine al giorno per terminare il libro in tempo. Il quesito si presta al confronto fra strategie diverse di soluzione. **RISULTATI DEL CAMPIONE** errata: 51,1 – corretta: 38,4 – Non risponde: 8,7



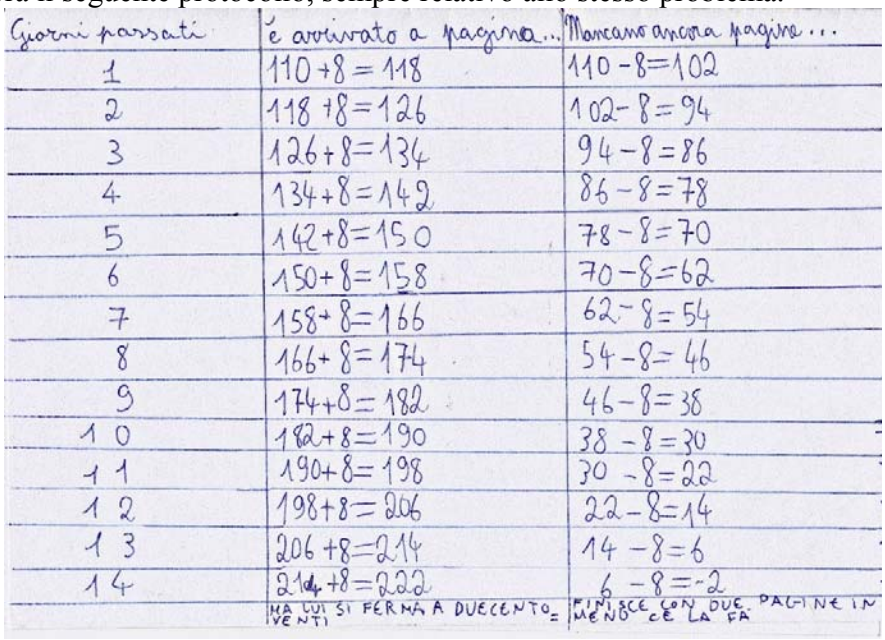
☒ No, perché Perché facendo 220:2=110 che sono esattamente le pagine di una metà del libro che sta leggendo Mattia, dato che decide di leggere 8 pagine al giorno per finire il libro in tempo ho fatto 8x14. Infatti 8 sono le pagine al giorno e 14 sono i giorni delle due settimane che hai di tempo ma il risultato non è stato 110 ma è stato 112 quindi non se la farà a finire il libro in tempo.

3

No perché facendo 220:2 =110 che sono esattamente le pagine di una metà del libro che sta leggendo Mattia, dato che decide di leggere 8 pagine al giorno per finire il libro in tempo ho fatto 8 x 14. Infatti 8 sono le pagine al giorno e 14 sono i giorni delle due settimane che hai di tempo ma il risultato non è stato 110 ma è stato 112 quindi non ce la farà a finire il libro in tempo.

L'allievo mostra il possesso di buone capacità argomentative, dà la risposta e, in seguito, la giustifica descrivendo l'intero processo di soluzione senza trascurare di chiarire cosa rappresentano i fattori della moltiplicazione che esegue; dal punto di vista linguistico il testo è decisamente ben strutturato, ma la frase avversativa che conclude il suo ragionamento fornisce una soluzione errata.

Si consideri ora il seguente protocollo, sempre relativo allo stesso problema.



Giorni passati	è arrivato a pagina...	Mancano ancora pagine...
1	110+8=118	110-8=102
2	118+8=126	102-8=94
3	126+8=134	94-8=86
4	134+8=142	86-8=78
5	142+8=150	78-8=70
6	150+8=158	70-8=62
7	158+8=166	62-8=54
8	166+8=174	54-8=46
9	174+8=182	46-8=38
10	182+8=190	38-8=30
11	190+8=198	30-8=22
12	198+8=206	22-8=14
13	206+8=214	14-8=6
14	214+8=222	6-8=-2
	MA LUI SI FERMA A DUECENTO VENTI	FINISCE CON DUE PAGINE IN MENO CE LA FA

L'allievo formalizza in una tabella cosa avviene nel corso delle 2 settimane (14 giorni) che Mattia ha a disposizione. È un modo differente di rappresentare la soluzione del problema, stavolta corretta, una soluzione che si affida ad un altro registro rispetto a quello *verbale-argomentativo* del precedente protocollo e anche ad operazioni differenti. I due allievi mostrano stili cognitivi diversi e ugualmente interessanti. È sicuramente produttivo nell'attività in classe che queste diversità vengano valorizzate, in primo luogo facendole emergere a livello individuale e, in seguito, confrontandole collettivamente.

Riportiamo nel seguito due domande, D6 di seconda pimaria e D8 di quinta primaria, che evidenziano difficoltà degli alunni a interpretare in modo corretto relazioni matematiche espresse in linguaggio naturale.
Un problema ritenuto a priori non particolarmente difficile, che tuttavia è stato risolto da poco più di un terzo degli allievi di seconda primaria, è il seguente.

D6. Carlotta ha 6 anni, la metà degli anni di suo fratello Roberto. Quanti anni ha Roberto?

Risposta: ..... anni

Risposta corretta: 12 o 12 anni o dodici o dodici anni

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
57,9	35,7	6,1

La domanda è stata classificata nel processo 1 (*Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica*) perché prevalente è sembrata fondamentale nel rispondere alla domanda, la conoscenza di termini matematici come "doppio" e "metà" e della relazione che tra essi intercorre.
L'elemento che molto probabilmente ha indotto in errore alcuni bambini è che nel testo viene dichiarata l'età di chi ha la "metà" degli anni, ma per conoscere quella richiesta occorre calcolare il doppio. Il bambino doveva comprendere che se Carlotta ha la metà degli anni, allora Roberto ha il doppio degli anni. La maggioranza dei bambini leggendo *metà* ha semplicemente diviso per 2: è una strategia molto diffusa quella di ricercare *parole chiave* nel testo da correlare alla scelta delle operazioni, anziché considerare le relazioni numeriche che il testo, nel suo complesso, esprime. Questo tipo di approccio è comprensibile data l'età degli allievi, ma la difficoltà di comprendere le relazioni matematiche, soprattutto quelle espresse da testi che richiedono una sorta di *ragionamento inverso*, permane anche a livelli successivi, come si evince dai seguenti item proposti in quinta (*Relazioni e funzioni*), sempre nel processo 4.

D8. La zia Elena va in pasticceria e compra una torta al cioccolato e una torta alla panna. Il prezzo totale delle due torte è di 24 euro. La torta al cioccolato costa 6 euro in più della torta alla panna.

a. **Quanto costa la torta alla panna?**

Risposta: ..... euro

b. **Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.**

.....

.....

.....

Risposta corretta

D8a: **9**
D8b: esplicitazione del procedimento seguito (anche solo calcoli)

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D8a	73,5	21,2	5,1
D8b	74,4	17,9	7,1

Solo un quinto degli allievi riesce a risolvere correttamente il problema e solo una percentuale ancora più bassa riesce a giustificare la soluzione (talvolta mostrando unicamente l'intera sequenza dei calcoli eseguiti).
Il problema si riferisce ad una campo numerico ampiamente dominato in quinta (numeri naturali di due cifre entro il 30) la difficoltà risiede esclusivamente nel riuscire a comprendere le relazioni numeriche in gioco. I risultati deludenti che si registrano in questa tipologia di *problemi inversi* richiedono una riflessione.

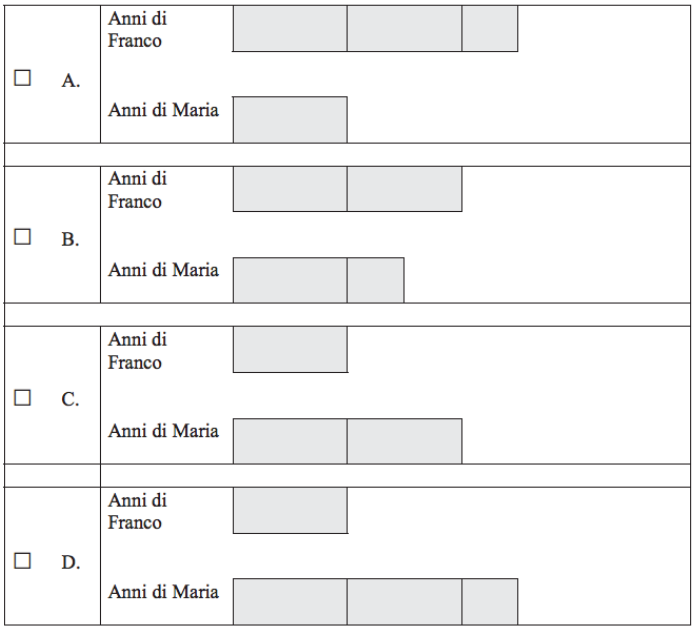
È possibile pensare ad attività che consentano agli allievi di esplorare uno stesso problema da diversi punti di vista, come arricchimento della proposta didattica anche in alternanza a consueti problemi-esercizio, avvalendosi anche di forme di rappresentazione grafica delle relazioni in gioco?
Partendo dal testo della domanda D8 proposta in quinta, si propone un esempio di come il problema possa essere declinato in diversi modi. Si tratta di testi che possono essere redatti insieme agli allievi, variando di volta in volta l'incognita.

1. La zia Elena va in pasticceria e compra una torta al cioccolato che costa 15 euro e una torta alla panna che costa 6 euro in meno di quella al cioccolato. Quanto spende?
2. La zia Elena va in pasticceria, spende 24 euro per comprare una torta alla panna che costa 9 euro e una torta al cioccolato. Quanto costa in più la torta al cioccolato rispetto a quella alla panna ? (oppure: Quanto costa in meno la torta alla panna rispetto a quella al cioccolato?)
3. La zia Elena va in pasticceria, spende 24 euro per comprare una torta al cioccolato che costa 15 euro e una alla panna. Quanto costa in meno la torta alla panna rispetto a quella al cioccolato? (oppure: Quanto costa in più la torta al cioccolato rispetto a quella alla panna?)
4. La zia Elena va in pasticceria e compra una torta al cioccolato e una torta alla panna. Il prezzo totale delle due torte è 24 euro. La torta alla panna costa 6 euro in meno rispetto a quella al cioccolato. Quanto costa la torta alla panna?

Si possono inoltre negoziare, insieme agli allievi, sempre con riferimento all'esempio considerato, forme di rappresentazione grafica simili a quelle contemplate nella domanda D26 somministrata in quinta nel 2010.

D26. Franco ha 12 anni. Maria ha il doppio degli anni di Franco più 4 anni. Indica qual è la rappresentazione grafica corretta della relazione tra gli anni di Franco e quelli di Maria.

Risposta corretta: D



RISULTATI DEL CAMPIONE 2010			
A	B	C	D
8,1%	5,4%	12,6 %	70,7%

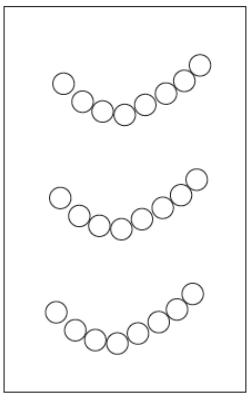
Notiamo, su problemi assimilabili come situazione matematica ma differenti come livello di consegna, la differenza drammatica di *performances* tra il 2010 (il 70,7% *riconosce* una rappresentazione corretta del problema) e il 2012 (solo il 21,2% *risolve* correttamente il problema).
È evidente che attività di questo tipo chiamano in causa la messa in gioco di molte abilità. Dal punto di vista matematico implicano la contemporanea presa in considerazione dell'addizione e della moltiplicazione e delle rispettive *operazioni inverse*, possono costituire un avvio al pensiero algebrico e, nel contempo, affinare negli allievi le capacità di comprensione del testo di un problema.

Si è fatto riferimento alla possibilità che forme di rappresentazione grafica possano contribuire alla comprensione delle relazioni numeriche espresse dal testo di un problema; tuttavia il ricorso al registro iconico deve essere attentamente valutato, occorre considerare eventuali condizionamenti percettivi che, talvolta, possono ostacolare la comprensione anziché giocare a suo favore.

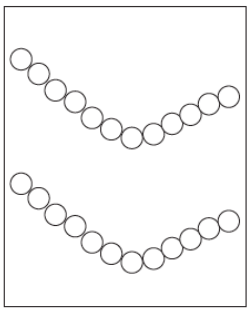
Consideriamo gli esiti della domanda D14 per la classe seconda.

D14. Anna ha 3 braccialetti formati da 8 perle ciascuno.
Marzia ha 2 braccialetti formati da 12 perle ciascuno.

Braccialetti di Anna



Braccialetti di Marzia



Anna usa tutte le perle dei suoi braccialetti per farsi una collana.
Anche Marzia usa tutte le perle dei suoi braccialetti per farsi una collana.
Quale tra le seguenti frasi è vera?

A. ☐ La collana di Marzia è più lunga di quella di Anna

B. ☐ La collana di Anna è più lunga di quella di Marzia

C. ☐ Le collane di Anna e di Marzia hanno la stessa lunghezza

Risposta corretta: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
41,0	15,5	41,2	0,6

Una percentuale molto alta di allievi, il 41% sceglie l'opzione A: molto probabilmente i bambini si lasciano condizionare dalla maggiore lunghezza di ciascun braccialetto di Marzia rispetto a quella di ciascun braccialetto di Anna.
L'immagine dunque induce all'errore, nonostante avrebbe potuto anche svolgere il ruolo di elemento facilitatore: conteggiando le perle di ciascuna bambina e confrontando i numeri si può rispondere correttamente. Il lavoro sui registri di rappresentazione può quindi risultare, in questo caso, per alcuni bambini prevalente su quello relativo alle operazioni da eseguire (3x8 e 2x12).
Generalizzando, ogni registro (verbale, iconico, simbolico) ha pregi e difetti che vanno attentamente valutati per far sì che il passaggio dall'uno all'altro (sicuramente auspicabile e produttivo nel processo di risoluzione di un problema) avvenga valorizzando le potenzialità di ciascuno. Si tratta di coinvolgere gli allievi in riflessioni di carattere metacognitivo che evidenzino il significato e il senso di ciascuna forma di rappresentazione e le possibili relazioni tra esse.
Saper relazioni operare conversioni fra diverse forme di rappresentazione è un indicatore significativo di competenza ed è per tale ragione che molti quesiti INVALSI chiamano in causa diversi registri comunicativi, come nel caso di domande già precedentemente commentate (D3 secondo livello 2012 e la D26 quinto livello 2009).

Si propongono due ulteriori esempi; il primo riguarda una domanda del 2012 per la seconda.

D15. Osserva l'operazione:

$$7 + 7 + 6 =$$

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con l'operazione nel riquadro?

A. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio?

B. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine in più di Mattia. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio?

C. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine ha Mattia in più di Giorgio?

Risposta corretta: B

L'alunno deve essere in grado di dare un senso ad un'addizione, abbinandola a una situazione problematica adatta.

Nella risposta A trascurano un addendo.
Nella risposta C, oltre a trascurare un addendo, si aggiunge la scorretta interpretazione della locuzione "in più".

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
20,3	43,5	28,4	5,2

Questa domanda è classificata nel processo 4, perché il suo *question intent* riguarda esplicitamente l'utilizzare correttamente il linguaggio della matematica per esprimere un problema: implica però anche il passaggio dal registro verbale a quello simbolico (rappresentazione della soluzione attraverso segni matematici). Nuovamente una buona percentuale di risposte corrette conferma le potenzialità dei bambini di 7 anni rispetto alle competenze di lettura.
Partendo da stimoli come questo, si possono far redigere agli allievi testi di problemi che si risolvono con una operazione data e confrontare insieme le diverse proposte. Gli errori saranno poi discussi, diventando così opportunità e non elementi da sanzionare. Inoltre costruire testi diversi, ma tutti compatibili con la stessa soluzione aritmetica, aiuta gli allievi a costruire *classi di problemi* come prodotto di un processo di insegnamento-apprendimento, il che è qualitativamente più efficace rispetto al far esercitare gli allievi ricorrendo a batterie di problemi simili.

Il secondo esempio si riferisce invece al livello 5 (*Relazioni e funzioni*). In questo caso, occorre individuare tra diverse espressioni quella che formalizza correttamente la soluzione del problema e per ragazzi di quinta primaria l'aspetto prevalente diventa proprio quello del passaggio e dalla formulazione verbale della situazione con rappresentazione (tabellare) dei dati, all'espressione numerica.

D29. La signora Giulia prepara 3 crostate seguendo la ricetta che vedi qui sotto.

Dosi per una crostata

250 g di farina

200 g di zucchero

175 g di burro

300 g di marmellata

La signora Giulia usa 35 g di burro per ungere ognuna delle tre teglie in cui cuoce le crostate. Quale espressione permette di calcolare la quantità totale di burro usata dalla signora Giulia?

A. ☐ 175 + 35 × 3

B. ☐ 175 × 3 + 35

C. ☐ 175 × 3 + 35 × 3

D ☐ (175 + 3) × 35

RELAZIONI E FUNZIONI

Risposta corretta: C

Si richiede all'alunno di riconoscere e dare quindi un senso ad una espressione aritmetica che risolve un problema.

RISULTATI DEL CAMPIONE

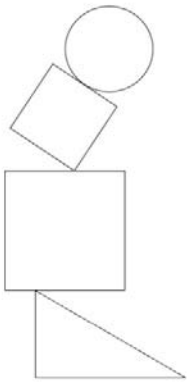
A	B	C	D	Non risponde
32,4	17,5	25,4	15,2	4,8

I distrattori A e B contengono *omissioni* (non viene moltiplicato per 3 il peso di una parte degli ingredienti), il distrattore D presenta una scorretta collocazione delle informazioni numeriche. Consegne analoghe possono essere proposte alla classe; in tal caso molto produttivo sarebbe discutere con gli allievi sulle diverse opzioni, soprattutto su quelle errate.

Prendiamo ora in considerazione l'ambito *Spazio e figure* e avviamo una lettura in verticale tra le classi seconda e quinta, con alcuni cenni anche al passaggio alla scuola secondaria di primo grado.

Analizziamo gli item D1 (livello 2) e D16 (livello 5). Nell'ottica della verticalità faremo anche cenno all'item D10 per il livello 6 (classe prima secondaria di primo grado). Tutti questi item si riferiscono alla capacità di identificare o disegnare figure piane, in questo caso, partendo dalla loro descrizione verbale (processo 8: *Saper riconoscere forma nello spazio*). In seconda si richiede di riconoscere una descrizione corretta, in quinta di riprodurre un quadrilatero con determinate caratteristiche vincolanti su lati e angoli e, in prima secondaria, di riconoscere un esagono (non regolare) in un contesto reale, ma insolito.

D1. Osserva la figura:



Questa figura è formata da

A. ☐ un cerchio, due triangoli e un quadrato

B. ☐ due quadrati, un cerchio e un triangolo

C. ☐ un rettangolo, due quadrati e un cerchio

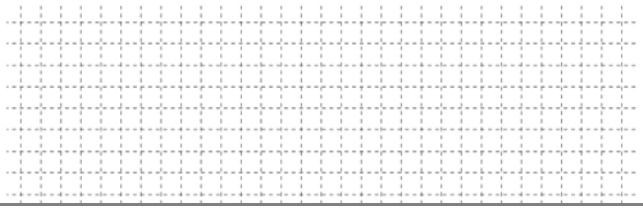
Risposta corretta: B

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
5,6	82,6	11,5	0,3

D16. Disegna con il righello, nello spazio quadrettato sotto, una figura geometrica che ha tutte queste caratteristiche:

– ha quattro lati
– i lati hanno la stessa misura
– gli angoli non sono tutti uguali



Risposta corretta: Lo studente disegna in modo corretto un rombo (che non abbia i quattro angoli uguali, e che quindi non sia un quadrato).

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
46,0	48,8	4,6

D10. Questa è la carta politica degli Stati Uniti d'America.

NORD

OVEST

EST

SUD

Quale, tra i seguenti stati dell'Ovest, ha la forma di un esagono?

A. ☐ Colorado

B. ☐ Utah

C. ☐ Nevada

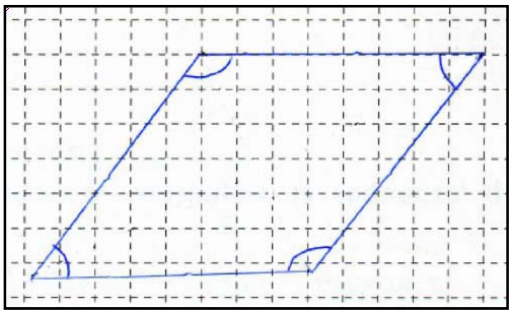
D. ☐ New Mexico

Risposta corretta: B

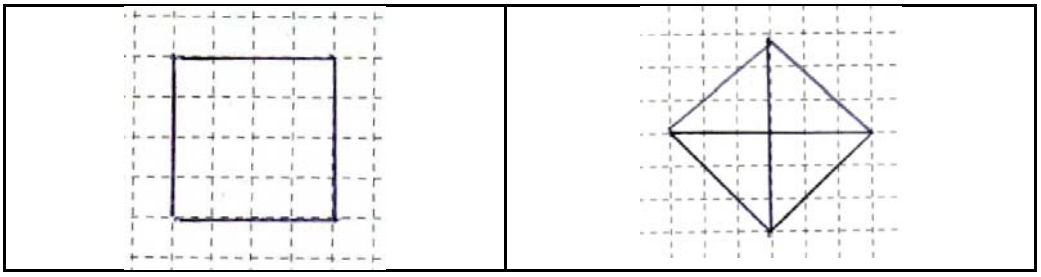
RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
5,5	47,1	30,7	15,7	0,9

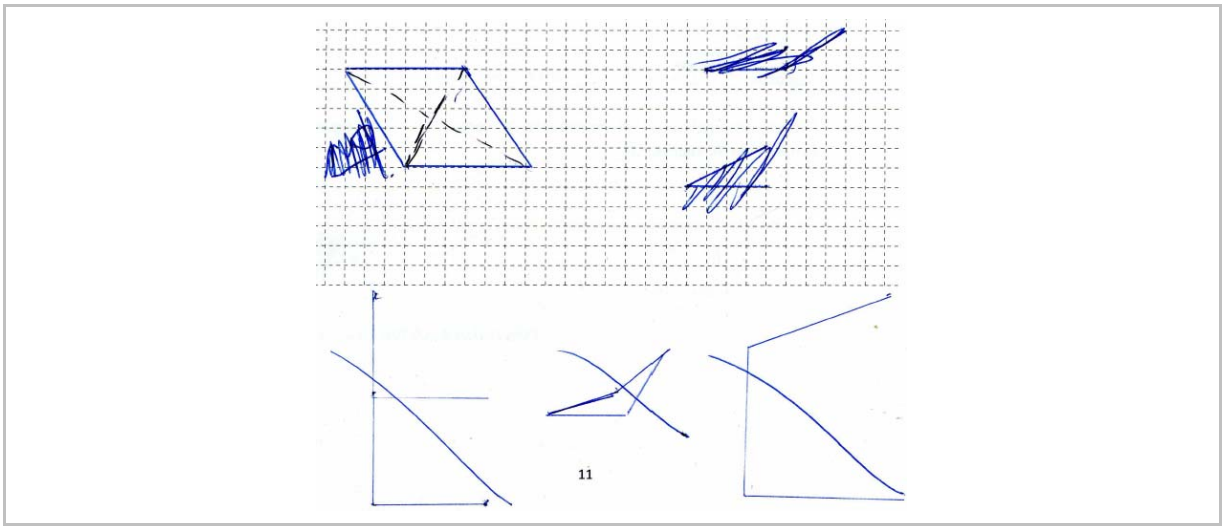
Dall'analisi dei risultati si evidenzia che in seconda il riconoscimento delle figure più semplici sembra essere una capacità consolidata: più dell'ottanta per cento degli allievi risponde correttamente. Invece in quinta la percentuale rimane sotto il 50%: la difficoltà è maggiore poiché si deve disegnare la figura partendo dalla sua descrizione. Significativa la percentuale di omissioni: il 4,6% di alunni non risponde.
Anche per la prima media il risultato si attesta ancora sotto il 50%: individuare un esagono *insolito,* perché concavo, è risultato difficile (è ben noto che per molti allievi l'immagine standard di esagono è quella di *esagono regolare*).
L'idea sottesa a tutti questi item è di utilizzare figure note, ma non in posizione o contesti canonici, o riferendosi a modelli stereotipati. In seconda sembra che solo una piccola percentuale non riesca a riconoscere il quadrato ruotato mentre l'11% probabilmente fa una errore di nomenclatura confondendo triangolo e rettangolo.
La difficoltà maggiore per gli alunni di quinta è stata quella di riuscire a comprendere che le caratteristiche elencate identificano un rombo escludendo il caso "particolare" del quadrato. Non vengono fornite indicazioni sulle diagonali, in genere tracciate nella rappresentazione canonica del rombo o negli esercizi ad esso connessi, bensì viene posta l'attenzione solo su lati e angoli. Nella pratica didattica, le diagonali sono spesso l'elemento "forte" del modello del rombo: nelle immagini standard sono quasi sempre in direzione orizzontale e verticale, compaiono nella formula per la determinazione dell'area, si utilizza la loro perpendicolarità per applicare il teorema di Pitagora...
Molti alunni sono così indotti a disegnare un "parallelogramma speciale" e, con l'utilizzo del righello, producono tentativi per ottenere la congruenza dei lati, senza necessariamente prestare attenzione alla perpendicolarità delle diagonali: il risultato è positivo perché un parallelogramma con i lati uguali è un rombo.



Alcuni poi si soffermano solo sull'uguaglianza dei lati e disegnano quindi un quadrato, sbagliando. Altri, pur riconoscendo le caratteristiche del rombo e partendo dal disegno delle diagonali, non tengono in considerazione l'informazione relativa agli angoli diversi e disegnano anche loro un quadrato.



In diversi protocolli si vedono tracce di poligoni che man mano vengono individuati fino alla realizzazione, nell'ipotesi migliore, del rombo.



Approfondiamo ora alcuni risultati relativi alla geometria tridimensionale, sempre relativi a domande collocabili nel processo 8 (*Saper riconoscere le forme nello spazio*). Prendiamo in considerazione la domanda D7 per la seconda.

D7. Questo è un pezzo delle costruzioni in legno di Stefano.

a. Quante facce ha in tutto?

A. ☐ Due

B. ☐ Quattro

C. ☐ Cinque

b. Le facce sono

A. ☐ triangoli e rettangoli

B. ☐ tutte rettangoli

C. ☐ tutte triangoli

Risposta corretta:
D7a: C
D7b: A

RISULTATI DEL CAMPIONE

	A	B	C	Non risponde
D7a	18,5	31,7	48,9	0,7
D7b	57,3	7,5	33,7	1,4

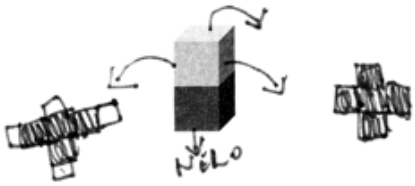
Tutti i quesiti che si riferiscono alle figure 3D sono soggetti alle inevitabili interferenze dovute alla rappresentazione bidimensionale. Questa difficoltà è intrinseca nel passaggio tra 3D e rappresentazione 2D e può essere attenuata fornendo agli studenti un repertorio vasto e diverso di rappresentazioni bidimensionali supportate sempre da esperienze concrete di costruzione nello spazio: sono fondamentali l'osservazione da diversi punti di vista e l'utilizzo di forme diverse da quelle canoniche (cubo, parallelepipedo, cono e cilindro).

La ricerca in didattica della matematica ha messo in luce che, nell'esplorazione delle figure tridimensionali, molti alunni hanno difficoltà nel costruirsi un'immagine mentale simulando la rotazione del solido o l'osservazione da diversi punti di vista. Questo "*saper vedere ciò che non si vede*" è un nodo cruciale per la didattica in geometria[12]. Fondamentale è anche puntare sulla descrizione di un solido utilizzando più registri comunicativi, anche quello gestuale che può supportare il linguaggio specifico e quello naturale (per esempio le mani possono rappresentare le facce di un solido, il parallelismo, la perpendicolarità, ecc...)[13].
Osserviamo che nell'item D7 è stata proposta una figura non standard per puntare sulla capacità di immaginazione. Nell'item a, poco meno della metà dei bambini individua correttamente la presenza di 5 facce; molti indicano 4 facce, non contando, forse, la base. Il 18% si ferma a considerare le informazioni date dalla sola percezione del disegno bidimensionale.
Inoltre, nell'item b, il 57,3% individua correttamente che le facce sono formate da triangoli e rettangoli. Significativo il fatto che il 33,7% risponda "tutti triangoli" scegliendo la strada percettiva del triangolo posto in primo piano.

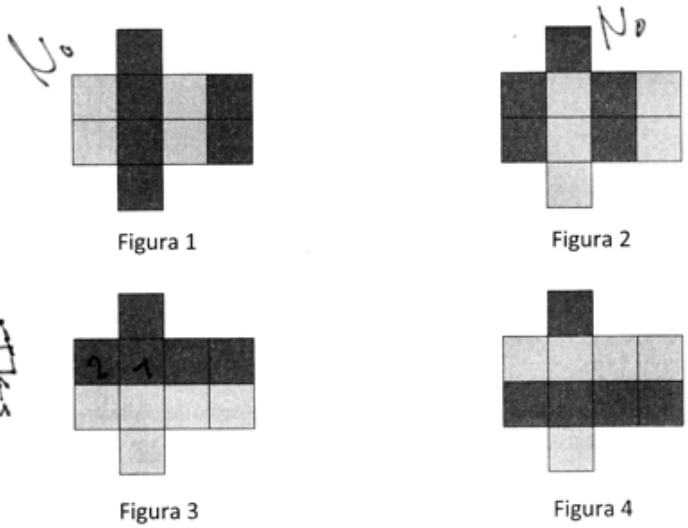
[12]"Contrariamente a quanto comunemente si crede, o si tende a far credere, molte delle più elementari idee geometriche presentano difficoltà inattese e smentiscono la fama di spontaneità che comunemente si attribuisce loro" (Mariotti, 2005, "*La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*").
[13]Per approfondimenti Arzarello et al. "*Matematica non è solo questione di testa"*, Erickson 2011.

In linea con le considerazione fin qui fatte consideriamo la domanda D31, per la quinta, della quale forniamo un protocollo originale.

D31. Con del cartoncino Pietro ha fatto la scatola a forma di parallelepipedo che vedi qui sotto. La metà superiore è di cartoncino grigio, la metà inferiore è di cartoncino nero.



Pietro ha aperto e schiacciato la scatola. Quale delle seguenti figure ha ottenuto?



A. ☐ Figura 1

B. ☐ Figura 2

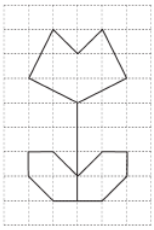
C. ☒ Figura 3

D. ☐ Figura 4

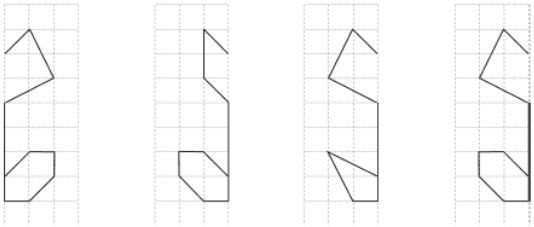
Questo item si basa sulla capacità di analizzare lo sviluppo di un solido. Il 58,7% degli alunni del campione individua correttamente la risposta C. Per le altre risposte non corrette si hanno rispettivamente il 7,7% per A, il 9,2% per B, il 16,3% per D (il distrattore con il taglio più percettivo) e solo l' 1,5% di omissioni.
Nel protocollo originale si possono osservare i segni grafici e la ricostruzione dello sviluppo che serve all'alunno per vagliare tutte le possibilità: proprio grazie alla decodifica di "*ciò che non si vede*" (si osservi, per esempio, la freccia con indicazione "nero" per la base appoggiata), l'alunno in questione riesce a rispondere positivamente.
In generale, l'abitudine a "sporcare il foglio" per supportare il ragionamento, può avvantaggiare gli alunni nell'individuazione della risposta corretta.

Analizziamo ora due item relativi alla capacità di lavorare nel campo delle simmetrie.
Nella domanda aperta univoca D8, per la seconda, l'alunno deve riconoscere le due parti simmetriche di una figura; nella scelta multipla D10, per la quinta, deve individuare la figura simmetrica rispetto a quella data.
Per entrambi i livelli 2 e 5, la percentuale di risposte corrette si attesta poco oltre il 50%. Analogamente anche per il livello 6 è presente un item in cui gli studenti devono individuare gli assi di simmetria in un triangolo equilatero; anche in questo caso le risposte corrette si attestano intorno alla metà del campione.

D8. Osserva questo disegno:



Con due di questi pezzi puoi ricostruirlo.



Pezzo A **Pezzo B** **Pezzo C** **Pezzo D**

Quali sono i due pezzi?

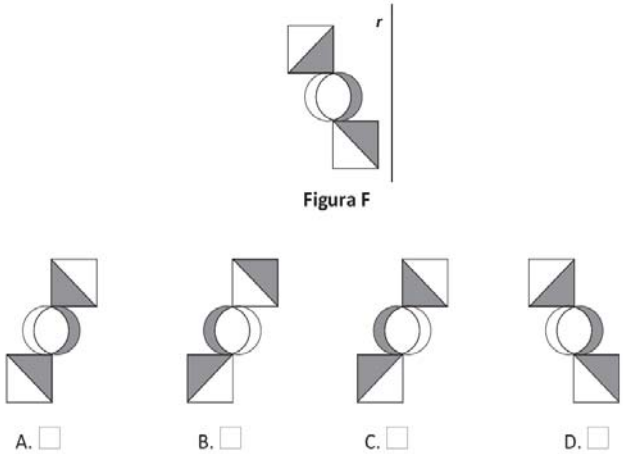
Risposta: …… e ……

Risposta corretta:
A e D oppure Pezzo A e Pezzo D.

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
42,3	54,9	1,7

D10. Quale tra le seguenti figure è simmetrica alla figura *F* rispetto all'asse di simmetria *r* ?



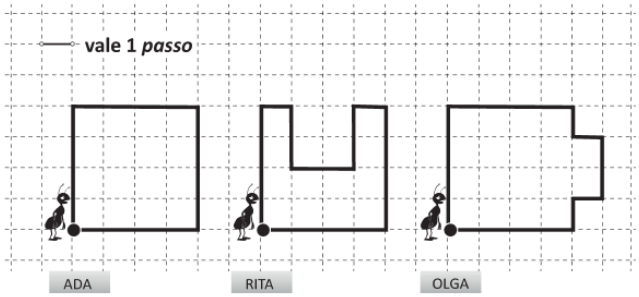
Risposta corretta: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
6,7	10,1	50,4	31,4	1,2

Ci soffermiamo ora su alcuni item geometrici che inducono a fare osservazioni sulla quadrettatura e sul suo utilizzo nella didattica, classificati nel processo 5 (*Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze*).
Nell'item D18, gli alunni di seconda devono confrontare la lunghezza di alcuni percorsi chiusi. Non si richiede *esplicitamente* il calcolo del perimetro.

D18. Tre formiche fanno una passeggiata.
Ogni formica parte dal punto indicato dal pallino ●, cammina lungo la linea nera e torna al punto di partenza.



a. Chi ha fatto 18 passi?

A. ☐ Ada
B. ☐ Rita
C. ☐ Olga

b. Quale formica ha fatto meno passi?

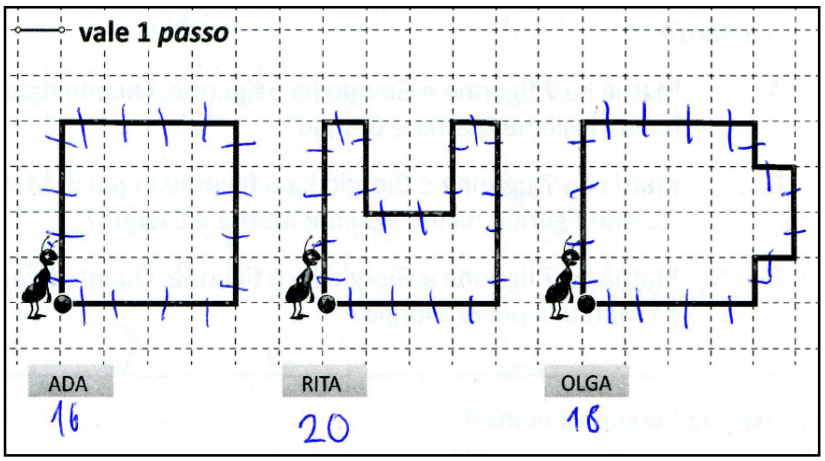
A. ☐ Ada
B. ☐ Rita
C. ☐ Olga

Risposta corretta:
D18a: C
D18b: A

RISULTATI DEL CAMPIONE

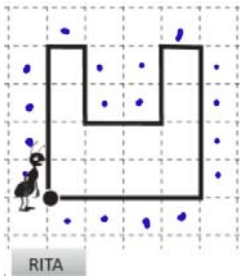
	A	B	C	Non risponde
D18a	9,1	16,5	68,1	1,6
D18b	52,5	34,1	6,8	1,5

Per la parte a, il 68,1% individua la risposta corretta C. Anche in questo caso "*sporcare il foglio*", tracciando segni sul bordo e attivando strategie di conteggio, ha sostenuto il processo risolutivo, come si può osservare dal seguente protocollo.



Sulla quadrettatura si possono verificare misconcetti relativi al conteggio del quadretto intero e non del bordo di quadretto. Nel linguaggio naturale, in particolare nel lessico quotidiano adottato in classe, spesso non si fa distinzione tra *lato di quadretto* e quadretto.

A questo proposito è significativa la percentale del 16,5% che ha scelto B (il percorso di Rita) contando 18 quadretti. Il seguente protocollo dimostra come l'alunno ha conteggiato erroneamente 18 *quadretti esterni*.



L'item b, ha ottenuto poco più della metà del campione di risposte corrette mentre il 34,1% privilegia, errando, la strada dell' impressione percettiva.
Attivare strategie di conteggio e misura mediante il supporto di segni o di strumenti, e non lasciarsi trasportare dalle suggestioni percettive, dovrebbero essere due componenti da educare in geometria, preliminari alla comprensione dei concetti di area e di perimetro.

L'item di quinta è una possibile evoluzione del precedente: si richiede di calcolare area e perimetro per conteggio.

D14. Osserva le seguenti figure.

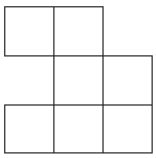


Figura 1

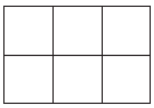


Figura 2

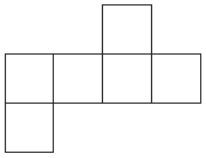


Figura 3

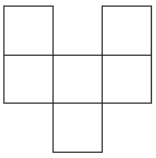


Figura 4

Quale di queste affermazioni è vera?

A. ☐ Le figure 1, 3, 4 hanno la stessa area

B. ☐ Le figure 3 e 4 hanno la stessa area e lo stesso perimetro

C. ☐ Le figure 2, 3, 4 hanno lo stesso perimetro

D. ☐ Tutte le figure hanno lo stesso perimetro

Risposta corretta: B

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
4,2	66,5	23,0	2,9	1,1

Risponde correttamente il 66,5% del campione. Il distrattore C, scelto da circa un quarto degli allievi, mette in evidenza l'errore nel calcolare l'area invece del perimetro. Si segnala inoltre che la scelta di tracciare il quadrettato solo all'interno delle figure, riduce la possibilità di errori di conteggio relativi ai quadretti esterni, come evidenziato nell'item di seconda.

Esaminiamo ora l'item D22 per la quinta che, a partire dall'ambito Spazio e Figure, è anche interconnesso a questioni di stima e di ragionamento inverso già discusse precedentemente. Infatti rientra nel macroprocesso della *modellizzazione*.
La *modellizzazione* riguarda i quesiti nei quali si chiede, principalmente, di risolvere problemi, di individuare una soluzione fra le diverse proposte, di "tradurre" in termini matematici una situazione, di interpretare un modello matematico.

D22. Un tappetino rettangolare ha l'area di circa 6000 cm². Un lato misura 81 cm. Quale tra le seguenti rappresenta una stima corretta della misura dell'altro lato?

A. ☐ Tra 50 cm e 60 cm

B. ☐ Tra 60 cm e 70 cm

C. ☐ Tra 70 cm e 80 cm

D. ☐ Tra 80 cm e 90 cm

Risposta corretta: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
11,1	17,4	39,0	26,1	5,1

Per rispondere alla domanda, lo studente, oltre a sapere come si trova l'area di un rettangolo, deve attivare un *ragionamento inverso* e quindi aver sperimentato che la divisione è l'operazione

inversa della moltiplicazione. Lo studente sarà avvantaggiato se avrà fatto esperienze di approssimazione di calcoli mentali per giungere a stimare un risultato. Questa competenza sarà molto utile nelle attività di *problem solving* per tenere sotto controllo la coerenza di un risultato. L'item D22 risulta essere medio difficile per gli alunni (39% di risposte corrette).

Analizziamo, infine, l'item D5 per la classe quinta.
La prima parte, a scelta multipla, risulta avere una percentuale di correttezza di circa il 57%, mentre, nella seconda parte, la percentuale si abbassa al 43% poiché viene richiesta una giustificazione che afferisce al macroprocesso *argomentazione*[14].

D5. L'insegnante ha consegnato a Lucia e a Giada due fogli uguali di carta bianca rettangolari e due foto rettangolari uguali. Le due ragazze devono incollare le foto sul foglio bianco. Hanno eseguito il lavoro in questo modo:

Lavoro eseguito da Lucia

Lavoro eseguito da Giada

a. Chi ha lasciato più spazio bianco?

A. ☐ Lucia

B. ☐ Giada

C. ☐ Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco

D. ☐ Non si può sapere perché non si conoscono le misure

b. Giustifica la tua risposta.

.....

.....

.....

Risposta corretta:
D5a: C
D5b: La risposta è considerata corretta se si fa riferimento al fatto che sia i fogli sia le foto hanno la stessa superficie oppure hanno le stesse dimensioni

RISULTATI DEL CAMPIONE

	A	B	C	D	Non risponde
D5a	13,5	23,6	57,1	4,9	0,5

	errata	corretta	Non risponde
D5b	51,7	43,0	4,6

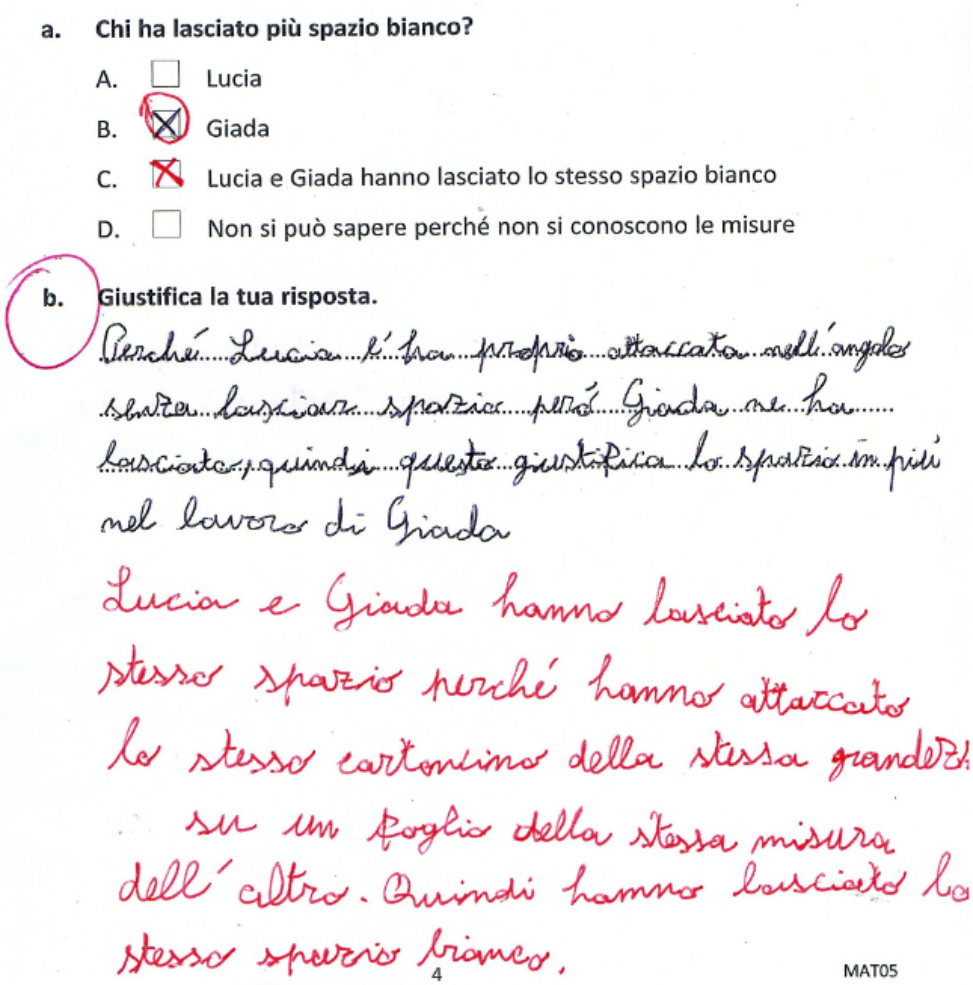
L'alunno, infatti, deve saper argomentare riguardo all'equivalenza tra figure e non lasciarsi condizionare dal solo aspetto percettivo.

L'*argomentazione* è un macroprocesso valutato a partire dalla classe quinta ma le competenze argomentative possono essere educate fin dai primi anni della scuola primaria. *Argomentare* si riferisce, principalmente, ai quesiti in cui si richiede di esplicitare (o riconoscere) il processo che è stato seguito per arrivare a un risultato.
La *comunicazione in matematica* occupa un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento ed è supportata da diversi registri linguistici, scritti, orali, simbolici e perfino gestuali come ha messo in evidente la più recente ricerca in Educazione Matematica. L'argomentazione, in particolare, è una componente cruciale della comunicazione in matematica.

[14]Per maggiori approfondimenti relativi a questo item, in particolare per l'argomentazione, consultare il quaderno SNV N.2/2012 (http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N2_MAT.pdf).

In generale le richieste che implicano di fornire spiegazioni (dal mostrare procedimenti risolutivi al fornire giustificazioni rispetto alla soluzione proposta) sono un punto debole per gli allievi di tutti i livelli e il numero di omissioni, talvolta significativo, induce a riflettere sull'importanza di una pratica non sempre radicata nella didattica d'aula. Ecco perché, fin dai primi anni della scuola primaria, è fondamentale prevedere attività di discussione, di interazione, di recupero dell'errore e di argomentazione scritta.
Argomentare non è solamente rispondere a una domanda, ma mettere in campo una struttura comunicativa matematica fondata anche su connettivi, quantificatori, informazioni fondamentali, intrecci tra pensiero logico e narrativo.

Tutti gli item argomentativi si prestano, in particolar modo, a un utilizzo successivo dei protocolli degli allievi, come si evince dal seguente protocollo.



a. Chi ha lasciato più spazio bianco?

A. ☐ Lucia
B. ☒ Giada
C. ☒ Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio bianco
D. ☐ Non si può sapere perché non si conoscono le misure

b. Giustifica la tua risposta.

Perché Lucia l'ha proprio attaccata nell'angolo sbalza lasciare spazio però Giada ne ha lasciato, quindi questa giustifica lo spazio in più nel lavoro di Giada

Lucia e Giada hanno lasciato lo stesso spazio perché hanno attaccato la stessa cartoncino della stessa grandezza su un foglio della stessa misura dell'altro. Quindi hanno lasciato lo stesso spazio bianco.

4 MAT05

L'alunno durante la prova risponde in modo errato già nella prima parte (B. Giada) e conseguentemente produce un'argomentazione non corretta. In questo protocollo si nota in nero l'argomentazione errata e, in rosso, quella riscritta dall'allievo dopo la discussione.
Terminata la fase ufficiale relativa alle correzione delle prove, l'insegnante può infatti riprendere i fascicoli e attivare con i propri alunni percorsi di recupero dell'errore. In particolare, per gli

item argomentativi, si individuano e si condividono le strutture comunicative più efficaci, complete e corrette matematicamente.
A questo punto l'alunno dovrebbe essere in grado di produrre una giustificazione completa e corretta.

Per concludere l'analisi relativa agli ambiti, trattiamo ora alcuni esempi di *Dati e previsioni*. In seconda, le domande riguardavano essenzialmente la lettura di tabelle, da cui gli allievi dovevano trarre dati su cui operare per comprendere una situazione. Si tratta quindi di domande classificate nel processo 7 (*Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale*), in contesti molto semplici e familiari.

I risultati della domanda D5 mostrano come i bambini abbiano generalmente acquisito una buona capacità di lettura delle tabelle:

D5. **La tabella mostra gli alimenti che un gruppo di bambini consuma abitualmente a colazione.**

	ALIMENTI				
	Latte	Tè	Biscotti	Pane	Marmellata
ANDREA	X		X		
DANIELE		X	X	X	
EMILIO			X	X	X
GIANNI	X			X	
IVAN		X		X	X
MARINO	X		X		X
NICOLA		X		X	X

Osserva la tabella e rispondi.

a. **Che cosa beve Nicola?**

Risposta: .....

b. **Quali sono i bambini che bevono il latte? Scrivi i loro nomi.**

Risposta: .....

c. **Quale alimento viene consumato dal maggior numero di bambini?**

Risposta: .....

d. **Uno dei bambini mangia pane e beve latte. Chi è?**

Risposta: .....

Risposta corretta:
D5a: Tè o **Il tè** o **Beve il tè**
D5b: Andrea, Gianni, Marino
D5c: pane
D5d: Gianni

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D5a	13,2	84,5	1,9
D5b	8,0	89,9	1,7
D5c	17,1	78,1	4,3
D5d	12,7	83,9	3

Questo risultato conferma quanto rilevato anche nelle prove degli anni precedenti. I problemi iniziano a insorgere quando su questi dati è necessario lavorare per ricavare informazioni e utilizzarle in un contesto. La domanda D6 della prova di quinta presenta una tabella "reale" (una pagina di orario ferroviario):

D6. **Luciana desidera trascorrere qualche giorno al mare a Rimini. Consulta l'orario dei treni e decide di prendere il treno che ci mette meno tempo.**

Stazione di partenza: **Roma Termini** Stazione di arrivo: **Rimini**		
	Partenza	**Arrivo**
1	11:28 ROMA TERMINI	17:03 RIMINI
2	13:58 ROMA TERMINI	18:14 RIMINI
3	16:30 ROMA TERMINI	20:51 RIMINI
4	18:30 ROMA TERMINI	22:07 RIMINI

Quale treno prenderà Luciana?

A. ☐ Il treno 1

B. ☐ Il treno 2

C. ☐ Il treno 3

D. ☐ Il treno 4

Risposta corretta: D

RISULTATI DEL CAMPIONE

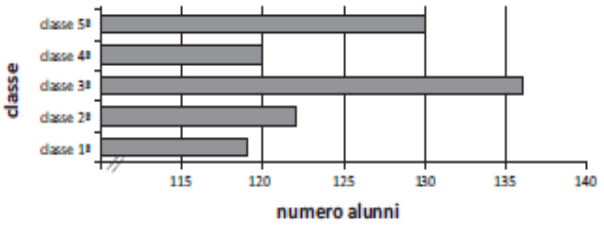
A	B	C	D	Non risponde
17,7	9,2	17,2	55,2	0,6

Il risultato è decisamente peggiore, e non sembra vada imputato solo alla difficoltà di operare con le misure di tempo (altre domande mostrano una discreta abilità dei ragazzi in questo compito).

Le domande D9 e D12 della prova di quinta presentano entrambe un grafico a barre; nella prima, i valori sull'asse delle ascisse non iniziano da 0 (come evidenziato sia dalle etichette che dall'asse interrotto dalle due barrette).

D9. **Il grafico rappresenta il numero di alunni per classe della scuola "Don Milani".**

Alunni della Scuola Primaria "Don Milani"



Giovanni, osservando il grafico, afferma che gli alunni della classe 5ª sono il doppio di quelli della classe 4ª.
Giovanni ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ **Sì, perché** .....

.....

.....

☐ **No, perché** .....

.....

.....

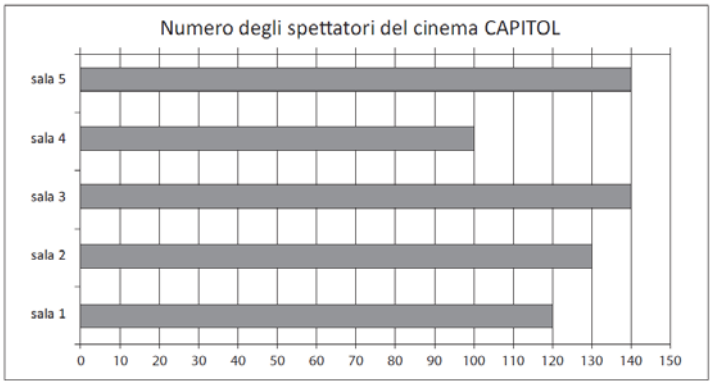
Risposta corretta: No, perché...

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
57,2	39,3	2,4

L'obiettivo della domanda era evidentemente quello di indagare la capacità di utilizzare questo artificio tecnico (non banale), senza lasciarsi fuorviare da effetti di tipo percettivo. Ne è risultato una domanda abbastanza difficile: solo il 39% circa degli allievi ha risposto correttamente. Evidentemente la capacità di base di leggere un grafico o una tabella non viene poi fatta crescere attraverso l'acquisizione di strumenti, tecniche e operatività via via più elaborate, necessarie per far fronte alla rappresentazione e alla manipolazione di dati sempre più complessi. Nella domanda D12, il primo item richiedeva una operazione "elementare" (la somma dei dati), mentre il secondo richiedeva il calcolo della media aritmetica.

D12. **Questo grafico rappresenta il numero di spettatori che sabato sera hanno assistito alle proiezioni nelle cinque sale del cinema *CAPITOL*.**



a. **Qual è stato il numero totale di spettatori presenti sabato sera nel cinema *CAPITOL*?**

Risposta: .....

b. **In media qual è stato il numero di spettatori per sala? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta il risultato.**

.....

.....

.....

Risultato: .....

Risposta corretta
D12a: 630
D12b:126

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D12a	28,6	68,1	3,2
D12b	47,0	39,1	13,3

La domanda D19 richiedeva, infine, di leggere una tabella di distanze chilometriche, la cui forma standard è diversa da quella delle ordinarie tabelle a doppia entrata, usuali nella pratica scolastica. Anche in questo caso i risultati non sono particolarmente buoni.
L'indicazione importante per la pratica scolastica, di nuovo, è quella di utilizzare situazioni e presentazioni varie, per evitare l'insorgere di abitudini e automatismi, riconducibili a fenomeni di *contratto didattico*, che in definitiva rendono molto più rigidi gli apprendimenti dei ragazzi.

D19. **Qui sotto sono riportate le distanze stradali in chilometri tra alcune città europee.**
La distanza tra due città è riportata all'incrocio tra riga e colonna: ad esempio, tra Berlino e Berna ci sono 965 km, tra Berlino e Bordeaux ci sono 1875 km.

BERLINO					
965	BERNA				
2200	1205	BILBAO			
1130	525	1515	BOLOGNA		
605	560	1435	1065	BONN	
1875	880	330	1350	1115	BORDEAUX

a. **Quanti chilometri ci sono tra Berlino e Bologna?**

Risposta: .....

b. **Se, partendo da Bologna, voglio viaggiare per meno di 1000 km, in quale città della tabella potrei andare?**

Risposta: .....

c. **Quali sono le due città più distanti tra loro?**

Risposta: .....

d. **Quali città della tabella si trovano a 880 km di distanza?**

Risposta: .....

Risposta corretta
D19a: 1130 o 1130 km o 1130 chilometri
D19 b: Berna
D19 c: Berlino e Bilbao
D 19 d: Berna e Bordeaux

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D19a	37,9	55,8	5,9
D19b	38,4	53,0	8,0
D19c	56,7	35,2	7,3
D19d	36,9	52,7	9,5

Conclusioni

Questa prima analisi verticale degli esiti delle prove di matematica dell'SNV fornisce alcune indicazioni, che possono venire utilizzate anche per l'autovalutazione del percorso formativo realizzato in ciascuna classe, e come elemento anche della valutazione qualitativa del *valore aggiunto*.
Una prima, chiara evidenza è che molte difficoltà dei ragazzi sono collegate a, e probabilmente dipendenti da, abitudini didattiche in cui sono presenti forti elementi di ripetitività e schematismo. Le situazioni non standard, divergenti rispetto alle abitudini, creano ostacoli; rompere il contratto didattico sembra diventare sempre più difficile, mano a mano che si prosegue nel percorso scolastico.
Un'altra indicazione, questa volta positiva, riguarda le capacità di calcolo, capacità che peraltro entrano in crisi quando, invece che un tradizionale calcolo scritto, viene richiesto un calcolo mentale o un calcolo approssimato- o una strategia di calcolo particolare.
Infine, come già rilevato in altre analisi, meritano particolare attenzione (e forniscono elementi per interventi sul percorso di insegnamento) le domande che coinvolgono cambiamento di registro di rappresentazione.

Tutte queste indicazioni, e le altre che ogni insegnante può ricavare confrontando i risultati dei propri allievi con quelli del campione, e analizzando i protocolli della propria classe, sono elementi che possono servire a migliorare, da un lato, la conoscenza del proprio insegnamento (stile, caratteristiche, punti di forza e di debolezza) e, dall'altro, la comprensione delle caratteristiche dell'apprendimento dei propri allievi.